

Tietoliikenneverkon tasapainottamisesta
iteratiivisilla menetelmillä

Visa-Matti Jokela

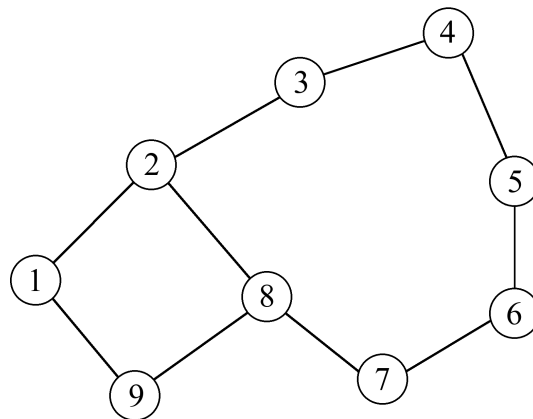
Pro gradu -tutkielma
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
2003

Sisältö

Johdanto	2
1 Variaatioepäyhtälöistä	5
1.1 Merkintöjä ja määritelmiä	6
1.2 Projektioista ja kiintopisteyhtälöstä	8
1.3 Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys	13
2 CR-menetelmistä	21
2.1 CR-menetelmien perusidea	21
2.2 Perusominaisuuksia	26
2.3 CR-menetelmän toteuttaminen	30
3 Verkkosovellutuksia	34
3.1 Verkoista	34
3.2 Verkon tasapainotila	38
3.3 Tasapainoesimerkkejä	47
3.4 Menetelmä verkon tasapainotukseen	54
3.5 Numeerisia kokeita	63
Lähdeluettelo	76

Johdanto

Liikenneverkkojen ruuhkien vähentämiseen on jo vuosikymmenten ajan kehitetty erilaisia menetelmiä, joilla verkon liikenne jaetaan käyttökustannusten mukaisesti kaikille käytettävissä oleville reiteille, eli ”tasapainotetaan”. Soveltamalla näitä menetelmiä voidaan myös pakettikytkentäisen tietoliikenneverkon liikennettä optimoida ruuhkautumisen välttämiseksi. Tietoliikenneverkon tapauksessa liikenteen tasapainottaminen merkitsee myös virrankulutuksen tasapainottamista verkon solmujen kesken. Tarkasteltaessa liikuteltavien solmujen muodostamaa (Kuva 1) monen hypyn verkkotopologiaa, jossa datapaketit kuljetetaan kohteeseensa muiden solmujen välityksellä, yksittäisten solmujen virrankulutus on verkon toiminnan kannalta hyvin kriittinen kysymys. Lähinnä tähän modernin tietoliikennetekniikan ongelmaan tässä tutkielmassa etsitään ratkaisua.



Kuva 1: Monen hypyn verkkotopologia.

Tarkastellaan Kuvan 1 verkkoa. Jos reitityksessä käytetään lyhimmän polun

määräämää reittiä, saa solmu 8 välitettäväkseen esimerkiksi kaiken solmujen 2 ja 6 välisen liikenteen. Jos solmu 8 toimii usean reitin välittäjäsolmuna, voi jatkuva lähettäminen kuluttaa loppuun sen virtalähteen. Tämän jälkeen verkon liikennöinti ei enää ole kovinkaan vankalla pohjalla (jos solmut eivät siirry lähemmäksi toisiaan muodostamaan uusia yhteyksiä). Liikenteen tasapainottaminen ohjaisi osan liikenteestä muille reiteille, jolloin myös osa virrankulutuksesta siirtyisi muiden solmujen riesaksi.

Tasapainon laskemiseen kehitettyjen menetelmien pohjalla on käytetty muun muassa kiintopistemenetelmiä ja epälineaarista optimointia. Vuosien saatossa on kuitenkin todettu kiintopistemenetelmien puuttellinen laskennallinen tehokkuus ja epälineaarisen optimoinnin vaatimat mallia rajoittavat oletukset. Näitä menetelmiä korvaamaan on noussut äärellisulotteinen variaatioepäyhtälö, joka ei aseta tarkasteltavalle ongelmalle vastaavia rajoituksia. Niinpä tässä tutkielmassa perehdytään variaatioepäyhtälöiden avulla tapahtuvaan tasapainotukseen. Yleisen liikenneverkon mallin pohjalta kehitetään tietoliikenneverkon liikennettä tasapainottava variaatioepäyhtälöongelma. Tämän ongelman ratkaisemiseksi tarkastellaan variaatioepäyhtälön ominaisuuksia ja variaatioepäyhtälöiden ratkaisemiseen kehitettyjä yhdistettyjä relaksaatiomenetelmiä.

Alunperin liikkuvan reunan ongelmien ratkaisuun kehitetyt variaatioepäyhtälöt ovat osoittautuneet käyttökelpoisiksi ja tehokkaiksi työkaluiksi monissa eri tieteenalojen ongelmissa, kuten mekaniikassa, peliteoriassa sekä erityisesti taloudellisten verkkojen ja liikenneverkkojen tasapainottamisessa. Variaatioepäyhtälöt ja niiden ratkaisumenetelmät ovatkin olleet ankaran tutkimuksen kohteena.

Yhdistetystä relaksaatiosta (Combined Relaxation, CR) puhuttaessa tarkoitetaan yleistä lähestymistapaa variaatioepäyhtälöiden ratkaisumenetelmien konstruointiin. CR-menetelmät perustuvat nimensä mukaisesti erilaisten relaksaatiomenetelmien yhdistelyyn, modifiointiin ja yleistämiseen.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa esitellään variaatioepäyhtälön käsite sekä osoitetaan joitakin ratkaisun olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä koskevia tuloksia. Lisäksi käsitellään kiintopisteyhtälöä ja sen yhteyttä variaatioepäyhtälöön. Luku 1 noudattelee pääosin teoksen [6] alkuosan rakennetta.

Tätä runkoa täydentävät lähteet [1, 4, 5, 7, 9, 10, 11].

Luvussa 2 paneudutaan variaatioepäyhtälöiden ratkaisemiseen kehitettyjen CR-menetelmien teoriaan ja toteutukseen. CR-menetelmien tarkastelussa edetään teoksen [7] ensimmäisen luvun mukaisesti.

Luvussa 3 tarkastellaan variaatioepäyhtälöiden verkkosovellutuksia. Esitellään verkon liikenteen tasapainottamisongelma ja sen soveltaminen tietoliikenneverkkoihin. Sovelletaan verkon tasapainotilan laskemiseen soveltuvaa CR-menetelmää ja ratkaistaan numeerisesti esimerkkiongelmia. Numeeristen kokeiden avulla tarkastellaan tasapainottamisella saavutettavia hyötyjä tietoliikenneverkoissa. Verkkoja ja tasapainotusta käsittelevässä teoriaosuudessa on käytetty lähteitä [2, 3, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Esimerkkiongelmien numeerisessa ratkaisussa on käytetty Kazanin yliopistossa kehitettyä tietokoneohjelmaa.

Luku 1

Variaatioepäyhtälöistä

Monet matemaattiset ongelmat ovat esitettävissä variaatioepäyhtälönä:

Esimerkki 1. [6] Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Minimoidaan funktio f yli välin $[a, b]$. On siis löydettävä sellainen piste $x_0 \in [a, b]$, että $f(x) \geq f(x_0)$ aina, kun $x \in [a, b]$. Pisteen x_0 sijainti välillä $[a, b]$ on joko $x_0 = a$, $a < x_0 < b$ tai $x_0 = b$. Tarkastellaan erikseen mahdolliset kolme tapausta:

Jos $x_0 = a$, niin

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ ja } x \geq x_0 \text{ aina, kun } x \in [a, b].$$

Jos $a < x_0 < b$, niin

$$f'(x_0) = 0.$$

Jos $x_0 = b$, niin

$$f'(x_0) \leq 0 \text{ ja } x \leq x_0 \text{ aina, kun } x \in [a, b].$$

Nämä kolme tapausta voidaan ilmaista yhtäpitävästi *variaatioepäyhtälön* muodossa

$$x_0 \in [a, b] \text{ ja } f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \text{ aina, kun } x \in [a, b]. \quad (1)$$

Tarkasteltava minimointiongelma on siis yhtäpitävä variaatioepäyhtälön (1) ratkaisemisen kanssa.

1.1 Merkintöjä ja määritelmiä

Variaatioepäyhtälölle esitetään kirjallisuudessa useita erilaisia määritelmiä – kukin muotoillaan tilanteen mukaan mielekkäällä tavalla. Usein (ks. esim. [9]) variaatioepäyhtälö määritellään yleisesti Hilbertin avaruuden V , sen duaaliavaruuden V^* , epätyhjän suljetun konveksin joukon $K \subseteq V$, bilineaarisen kuvauksen $a : V \times V \rightarrow V$ ja alkion $f \in V^*$ avulla. On löydettävä piste $u \in K$, joka toteuttaa variaatioepäyhtälön

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \text{ aina, kun } v \in K,$$

missä $(\cdot, \cdot) : V^* \times V \rightarrow V$. Vastaavia määrittelyjä, joissa duaaliavaruus V^* korvataan avaruudella V ja $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow V$ on sisätulo, on myös esitetty.

Ennen tässä tutkielmassa käyttökelpoisen määritelmän esittämistä esitellään joitakin jatkossa käytettäviä merkintöjä ja käsitteitä. Analyysin ja optimointiteorian peruskäsitteet oletetaan tunnetuiksi.

Jos joukko A sisältyy joukkoon B , merkitään $A \subseteq B$. Jos tiedetään, että sisältyminen on aito, merkitään $A \subsetneq B$. Merkitään n -ulotteisen ($n \in \{1, 2, 3, \dots\}$) euklidisen avaruuden r -säteistä x_0 -keskistä suljettua palloa $B_r(x_0)$, siis

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq r \}.$$

Merkitään $K_r = K \cap B_r(0)$, missä $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Ei-negatiivisten reaalilukujen joukkoa merkitään \mathbb{R}_+ .

Määritelmä 1.1. Joukko $K \subseteq \mathbb{R}^n$ on *konvekksi*, jos mielivaltaisilla pisteillä $x, y \in K$ pätee

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K \text{ aina, kun } \lambda \in]0, 1[.$$

Määritelmä 1.2. Funktio $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on *konvekksi*, jos mielivaltaisilla pisteillä $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \text{ aina, kun } \lambda \in]0, 1[.$$

Merkitään euklidista sisätuloa $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ja euklidista normia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, siis

$$\langle x, y \rangle = y^T x = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{aina, kun } x, y \in \mathbb{R}^n$$

ja

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{aina, kun } x \in \mathbb{R}^n.$$

Positiivisesti semidefiniitin matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ määräämä normi $\|\cdot\|_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään asettamalla

$$\|x\|_A = \sqrt{\langle Ax, x \rangle} \quad \text{aina, kun } x \in \mathbb{R}^n.$$

Esitellään nyt tässä tutkielmassa tarkasteltava perusongelma ja määritellään variaatioepäyhtälö tämän tutkielman tarpeiden mukaisesti.

Variaatioepäyhtälöongelma. [11] Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^n$ epätyhjä suljettu konvekssi joukko ja olkoon $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. On löydettävä sellainen piste $x^* \in K$, että

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K. \quad (1.1)$$

Määritelmä 1.3. Epäyhtälöä (1.1) kutsutaan *variaatioepäyhtälöksi*. Joukko $K \subseteq \mathbb{R}^n$ on variaatioepäyhtälön *käypä joukko*. Kuvaus $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ on variaatioepäyhtälön *kohdefunktio*.

Jatkossa siis joukolla K tarkoitetaan aina epätyhjää suljettua konvekssia käypää joukkoa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ja kuvauksella F jatkuvaa kohdefunktiota $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$. Merkitään jatkossa variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisujen muodostamaa *ratkaisujoukkoa* K^* .

Huomautus 1.1. Tässä luvussa esitettävistä tuloksista monet ovat voimassa yleisesti Hilbert-, Banach- tai normiavaruuksissa. Tutkielman painopiste on kuitenkin reaali maailman sovellutuksissa (Luvussa 3), joten variaatioepäyhtälöitä koskevissa tarkasteluissa rajoitutaan euklidiseen avaruuteen \mathbb{R}^n .

1.2 Projektioista ja kiintopisteystälöstä

Kiintopisteongelma. Olkoon $S \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko ja olkoon $G : S \rightarrow S$ kuvaus. On löydettävä piste $x^* \in S$, joka toteuttaa *kiintopisteystälön* $G(x^*) = x^*$. Tällaista pistettä x^* sanotaan kuvauksen G *kiintopisteeksi*.

Tässä kappaleessa tarkastellaan kiintopisteongelmaa esimerkkinä variaatioepäyhtälön avulla ratkaistavista ongelmista. Tätä tarkastelua varten määritellään projektio suljettuun konvekseen joukkoon. Esittämällä projektio variaatioepäyhtälönä saadaan variaatioepäyhtälöongelmalle yhtäpitävä kiintopisteongelma. Kappaleen tuloksia käytetään jatkossa tarkasteltaessa variaatioepäyhtälön ratkeavuutta.

Lause 1.1. *Jokaiselle pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ on olemassa yksikäsitteinen piste $y \in K$, jolle*

$$\|x - y\| = \inf_{\eta \in K} \|x - \eta\|. \quad (1.2)$$

Todistus. [6] Olkoon piste $x \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen. Joukko $K \neq \emptyset$ on suljettu, joten

$$\inf_{\eta \in K} \|x - \eta\| =: d$$

on olemassa. Suurimman alarajan määritelmän (ks. [5]) mukaan on olemassa sellainen jono $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq K$, että

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_k\|. \quad (1.3)$$

Osoitetaan, että $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono. Soveltamalla sisätuloavaruuden *suunnikassääntöä*

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \text{aina, kun } a, b \in K$$

saadaan

$$\begin{aligned} 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) &= \|(x - y_m) + (x - y_n)\|^2 + \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\ &= \|2x - (y_m + y_n)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \\ &= 4 \left\| x - \frac{1}{2}(y_m + y_n) \right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \end{aligned}$$

aina, kun $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Näin ollen

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right\|^2$$

aina, kun $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Pisteet y_m ja y_n kuuluvat konvekseen joukkoon K , joten myös piste $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in K$ ($\lambda = \frac{1}{2}$ Määritelmässä 1.1). Täten

$$\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right\| \geq \inf_{\eta \in K} \|x - \eta\| = d$$

ja

$$\|y_n - y_m\|^2 + 4d^2 \leq 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2).$$

Koska normi on aina ei-negatiivinen, saadaan edellisestä yhtälön (1.3) nojalla

$$\|y_n - y_m\| \rightarrow 0, \text{ kun } n, m \rightarrow \infty.$$

Jono $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subseteq K$ on siis Cauchyn jono. Koska K on suljettu, on olemassa sellainen $y \in K$, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y.$$

On löydetty väitteen piste, joka antaa etäisyyden $\inf_{\eta \in K} \|x - \eta\|$:

$$\inf_{\eta \in K} \|x - \eta\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_k\| = \left\|x - \lim_{k \rightarrow \infty} y_k\right\| = \|x - y\|.$$

Osoitetaan saadun pisteen yksikäsitteisyys. Oletetaan, että pisteet $y, z \in K$ molemmat toteuttavat ehdon (1.2), eli $\|x - y\| = \|x - z\| = d$. Jälleen piste $\frac{1}{2}(y + z)$ kuuluu konvekseen joukkoon K , joten

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \left\|x - \frac{1}{2}(y + z)\right\|^2 \\ &= \left\|\frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(x - z)\right\|^2. \end{aligned}$$

Suunnikassäännön nojalla

$$2\left(\left\|\frac{1}{2}(x - y)\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}(x - z)\right\|^2\right) = \left\|\frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(x - z)\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}(z - y)\right\|^2,$$

joten

$$\begin{aligned} d^2 &\leq 2\left(\frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{4}d^2\right) - \frac{1}{4}\|z - y\|^2 \\ &= d^2 - \frac{1}{4}\|z - y\|^2. \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{1}{4} \|z - y\|^2 \leq 0,$$

joten täytyy olla $y = z$. □

Määritelmä 1.4. Lauseen 1.1 mukainen piste $y \in K$ on pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ *projektio* joukolle K ; merkitään $y = Pr_K x$. Operaattori $Pr_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$, joka kuvaa jokaisen pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ projektiolleen joukossa K , on *projektio-operaattori*.

Jatkoa varten todetaan (ks. [7]), että positiivisesti semidefiniitin matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($A \neq 0$) määräämän normin suhteen voidaan määritellä matriisin A generoima pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ projektio joukolle K ; piste $y = Pr_K^A x \in K$, jolle pätee

$$\|x - y\|_A = \inf_{\eta \in K} \|x - \eta\|_A.$$

Osoitetaan seuraavaksi kuuluisa *Brouwerin kiintopistelause*. Monimutkaisen todistuksen (ks. esim. [1]) lyhentämiseksi nojaututaan Brouwerin aikaisempaan tulokseen ([10] s. 188):

Lemma 1.2. *Jos $B \subsetneq \mathbb{R}^n$ on suljettu pallo ja kuvaus $T : B \rightarrow B$ on jatkuva, niin kuvauksella T on kiintopiste.*

Lause 1.3 (Brouwerin kiintopistelause). *Olkoon $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ epätyhjä konvekksi kompakti joukko ja olkoon kuvaus $G : S \rightarrow S$ jatkuva. Tällöin kuvauksella G on olemassa ainakin yksi kiintopiste.*

Todistus. [6] *Heine-Borelin lauseen* mukaan joukko $S \subseteq \mathbb{R}^n$ on kompakti, jos ja vain jos $S \subseteq \mathbb{R}^n$ on suljettu ja rajoitettu. Tässä joukko S on lisäksi epätyhjä ja konvekksi, joten projektio joukolle S on määritelty Määritelmän 1.4 mukaisesti.

Olkoon $B \subsetneq \mathbb{R}^n$ sellainen suljettu pallo, että $S \subseteq B$. Koska projektio-operaattori $Pr_S : \mathbb{R}^n \rightarrow S$ on jatkuva [11], myös yhdistetty kuvaus $G \circ Pr_S : B \rightarrow S$ on jatkuva. Lemman 1.2 nojalla yhdistetyllä kuvauksella $G \circ Pr_S$ on kiintopiste x^* , siis

$$G \circ Pr_S x^* = x^*. \tag{1.4}$$

Piste $x^* \in S$, joten projektion määritelmän nojalla

$$G \circ Pr_S x^* = G(Pr_S x^*) = G(x^*). \quad (1.5)$$

Yhtälöistä (1.4) ja (1.5) seuraa väite $G(x^*) = x^*$. \square

Myös Brouwerin kiintopistelause (vrt. Huomautus 1.1) pätee yleisemmässäkin tapauksessa, nimittäin joukon S ollessa normiavaruuden osajoukko. Tämä tulos tunnetaan *Schauderin lauseena*, joka seuraa *Tychonoffin lauseesta* [1].

Lause 1.4. *Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $y \in K$. Tällöin $y = Pr_K x$, jos ja vain jos*

$$\langle y - x, z - y \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } z \in K. \quad (1.6)$$

Todistus. [6] Olkoon $y = Pr_K x \in K$ ja piste $z \in K$ mielivaltainen. Aina, kun $\lambda \in [0, 1]$, piste

$$\lambda z + (1 - \lambda)y = y + \lambda(z - y)$$

kuuluu konvekseen joukkoon K . Asetetaan funktio

$$\phi(\lambda) = \|x - y - \lambda(z - y)\|^2.$$

Pisteen y projektio-ominaisuudesta (1.2) nähdään, että funktio $\phi(\lambda)$ saavuttaa miniminsä pisteessä $\lambda = 0$. Koska tässä funktio ϕ minimoidaan yli välin $[0, 1]$, huomataan (kuten Esimerkissä 1) että $\phi'(0) \geq 0$. Toisaalta

$$\phi(\lambda) = \|x - y\|^2 - 2\lambda \langle x - y, z - y \rangle + \lambda^2 \|z - y\|^2$$

ja

$$\phi'(\lambda) = -2 \langle x - y, z - y \rangle + 2\lambda \|z - y\|^2.$$

Näin ollen

$$\phi'(0) = -2 \langle x - y, z - y \rangle \geq 0,$$

joten

$$\langle y - x, z - y \rangle \geq 0.$$

Todistetaan vielä väitteen toinen suunta. Olkoon $\langle y - x, z - y \rangle \geq 0$ aina, kun $z \in K$. Lisäämällä ja vähentämällä x saadaan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle y - x, z - x + x - y \rangle \\ &= \langle y - x, z - x \rangle + \langle y - x, x - y \rangle \\ &= \langle y - x, z - x \rangle - \langle y - x, y - x \rangle \\ &= \langle y - x, z - x \rangle - \|y - x\|^2 \quad \text{aina, kun } z \in K. \end{aligned}$$

Soveltamalla *Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä*

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \quad \text{aina, kun } x, y \in \mathbb{R}^n$$

saadaan

$$\|y - x\|^2 \leq \langle y - x, z - x \rangle \leq \|y - x\| \|z - x\| \quad \text{aina, kun } z \in K. \quad (1.7)$$

Osoitetaan nyt projektio-ominaisuus erikseen triviaalissa tapauksessa $\|y - x\| = 0$ ja tapauksessa $\|y - x\| > 0$. Oletetaan ensin, että $\|y - x\| > 0$. Jakamalla epäyhtälö (1.7) puolittain normilla $\|y - x\|$ saadaan

$$\|y - x\| \leq \|z - x\| \quad \text{aina, kun } z \in K,$$

joten $y = Pr_K x$. Jos $\|y - x\| = 0$, saadaan välittömästi

$$\|z - x\| \geq 0 = \|y - x\| \quad \text{aina, kun } z \in K,$$

mikä todistaa väitteen. □

Osoitetaan variaatioepäyhtälön ja kiintopisteyhtälön välinen yhteys.

Lause 1.5. *Piste $x^* \in K$ on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu, jos ja vain jos mielivaltaisella $\gamma > 0$*

$$x^* = Pr_K(x^* - \gamma F(x^*)). \quad (1.8)$$

Todistus. [11] Olkoon x^* variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu, siis

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K.$$

Kerrotaan epäyhtälö puolittain vakiolla $-\gamma < 0$ ja lisätään puolittain $\langle x^*, y - x^* \rangle$, jolloin saadaan

$$\langle x^*, y - x^* \rangle \geq \langle x^* - \gamma F(x^*), y - x^* \rangle \quad \text{aina, kun } y \in K. \quad (1.9)$$

Lauseessa 1.4 epäyhtälö (1.6) on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\langle y, z - y \rangle \geq \langle x, z - y \rangle \quad \text{aina, kun } z \in K$$

kanssa. Näin ollen Lauseesta 1.4 ja epäyhtälöstä (1.9) nähdään, että $x^* = Pr_K(x^* - \gamma F(x^*))$, joten variaatioepäyhtälö (1.1) on yhtäpitävä kiintopisteyhtälön (1.8) kanssa. □

1.3 Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Variaatioepäyhtälöongelmalla ei suinkaan kaikissa tilanteissa ole ratkaisua. Tässä kappaleessa määrätään joitakin ehtoja ratkaisun olemassaololle ja yksikäsitteisyydelle. Osoitetaan aluksi variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisun olemassaolo käyvän joukon K ollessa kompakti.

Lause 1.6. *Olkoon $K \subsetneq \mathbb{R}^n$ kompakti. Tällöin variaatioepäyhtälöllä (1.1) on ratkaisu.*

Todistus. [6] Olkoon $I : K \rightarrow K$ identiteettikuvaus ja olkoon $\gamma > 0$ mielivaltainen. Koska projektio-operaattori $Pr_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ ja kuvaus $I - \gamma F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ ovat jatkuvia, myös yhdistetty kuvaus $Pr_K \circ (I - \gamma F) : K \rightarrow K$ on jatkuva. Näin ollen Brouwerin kiintopistelauseen nojalla on olemassa sellainen $x^* \in K$ (kiintopiste), että

$$\begin{aligned} Pr_K \circ (I - \gamma F)(x^*) &= Pr_K(x^* - \gamma F(x^*)) \\ &= x^*. \end{aligned}$$

Lauseen 1.5 nojalla x^* on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu. □

Seuraavissa ratkaisun olemassaololle ja yksikäsitteisyydelle osoitettavissa tuloksissa asetetaan lisärajoitteita variaatioepäyhtälön kohdefunktion jatkuvuudelle. Tulevia tarkasteluja varten määritellään monotonisuuden käsite.

Määritelmä 1.5. [7] Olkoot $W, V \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksit, $W \subseteq V$ ja olkoon $G : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Kuvaus G on

- (a) *vahvasti monotoninen* joukossa W vakiolla $\tau > 0$, jos jokaiselle pisteparille $x, y \in W$ on voimassa

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \geq \tau \|x - y\|^2;$$

- (b) *aidosti monotoninen* joukossa W , jos jokaiselle pisteparille $x, y \in W$, missä $x \neq y$, on voimassa

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle > 0;$$

(c) *monotoninen* joukossa W , jos jokaiselle pisteparille $x, y \in W$ on voimassa

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \geq 0;$$

(d) *pseudomonotoninen* joukossa W , jos jokaiselle pisteparille $x, y \in W$ ehdosta

$$\langle G(y), x - y \rangle \geq 0$$

seuraa

$$\langle G(x), x - y \rangle \geq 0.$$

Kuvausta $G : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ sanotaan monotoniseksi (määritelmän muut kohdat vastaavasti), jos G on monotoninen joukossa V .

Lause 1.7. *Olkoon kohdefunktio F pseudomonotoninen. Tällöin x^* on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu, jos ja vain jos $x^* \in K$ ja*

$$\langle F(y), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K. \quad (1.10)$$

Todistus. Olkoon x^* variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu. Tällöin varmasti $x^* \in K$. Koska F on pseudomonotoninen, ehdosta

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K$$

seuraa väitteen epäyhtälö

$$\langle F(y), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K.$$

Olkoon nyt $x^* \in K$ ja

$$\langle F(y), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K. \quad (1.11)$$

Olkoon $y \in K$ mielivaltainen. Käypä joukko K on konvekksi, joten $\lambda y + (1 - \lambda)x^* \in K$ aina, kun $\lambda \in]0, 1[$. Oletuksen (1.11) nojalla

$$\langle F(\lambda y + (1 - \lambda)x^*), \lambda y + (1 - \lambda)x^* - x^* \rangle \geq 0,$$

toisin sanoen

$$\lambda \langle F(\lambda(y - x^*) + x^*), y - x^* \rangle \geq 0.$$

Jaetaan epäyhtälö vakiolla $\lambda \in]0, 1[$. Väite saadaan raja-arvona, kun $\lambda \rightarrow 0+$.

□

Epäyhtälöä (1.10) sanotaan *duaalivariaatioepäyhtälöksi* tai variaatioepäyhtälön (1.1) *duaaliksi*. Joukko K on myös duaalivariaatioepäyhtälön käypä joukko ja kuvaus F sen kohdefunktio. Merkitään jatkossa duaalivariaatioepäyhtälön (1.10) ratkaisujoukkoa K^d .

Lause 1.7 siis osoitti variaatioepäyhtälöllä (1.1) ja sen duaalilla (1.10) olevan samat ratkaisut ainakin silloin, kun kohdefunktio F on pseudomonotoninen. Lyhyemmin: Jos F on pseudomonotoninen, niin $K^* = K^d$. Lauseen 1.7 toinen suunta todistettiin käyttämättä hyväksi pseudomonotonisuusoletusta, joten voidaan todeta, että sisältyvyys $K^d \subseteq K^*$ pätee yleisesti. Tähän havaintoon nojaututaan usein Luvussa 2 tarkasteltaessa CR-menetelmien perusominaisuuksia.

Lause 1.8. *Jos kohdefunktio F on aidosti monotoninen, niin variaatioepäyhtälöllä (1.1) on olemassa enintään yksi ratkaisu.*

Todistus. Oletetaan, että variaatioepäyhtälöllä (1.1) on olemassa kaksi erisuurta ratkaisua. Olkoot x^* ja z^* erisuuret ratkaisut. On siis voimassa

$$\begin{cases} \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 & \text{aina, kun } y \in K \\ \langle F(z^*), y - z^* \rangle \geq 0 & \text{aina, kun } y \in K \end{cases} .$$

Eriyisesti, koska $z^*, x^* \in K$, pätee

$$\begin{cases} \langle F(x^*), z^* - x^* \rangle \geq 0 \\ \langle F(z^*), x^* - z^* \rangle \geq 0 \end{cases} .$$

Kerrotaan epäyhtälöt vakiolla -1 , jolloin saadaan

$$\begin{cases} \langle F(x^*), x^* - z^* \rangle \leq 0 \\ \langle -F(z^*), x^* - z^* \rangle \leq 0 \end{cases} .$$

Summaamalla saadut epäyhtälöt saadaan

$$\langle F(x^*) - F(z^*), x^* - z^* \rangle \leq 0.$$

Toisaalta aidosti monotonisen kuvauksen määritelmän mukaan täytyy olla

$$\langle F(x^*) - F(z^*), x^* - z^* \rangle > 0,$$

mikä on ristiriita. Näin ollen vastaoletus on väärä ja väite oikea. \square

Kohdefunktion F aito monotonisuus siis takaa variaatioepäyhtälön (1.1) mahdollisen ratkaisun yksikäsitteisyyden. Se ei kuitenkaan vielä takaa ratkaisun olemassaoloa:

Esimerkki 2. Oletetaan, että variaatioepäyhtälöongelman käypä joukko on $K = \mathbb{R}$ ja kohdefunktio $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on eksponenttifunktio $F(x) = e^x$. Aina, kun $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x \neq y$, erotukset $F(x) - F(y)$ ja $x - y$ ovat samanmerkkisiä ja nolosta eroavia. Näin ollen F on Määritelmän 1.5 mielessä aidosti monotoninen. Variaatioepäyhtälö (1.1) ei ratkea, sillä jokaiselle pisteelle $x^* \in \mathbb{R}$ voidaan valita piste $y < x^*$, jolloin

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle = \underbrace{e^{x^*}}_{>0} \underbrace{(y - x^*)}_{<0} < 0.$$

Ratkaisun olemassaololle riittävän ja välttämättömän ehdon määrittämiseksi tarkastellaan seuraavaa ongelmaa: Olkoon $r > 0$ vakio. On löydettävä sellainen piste $x_r \in K_r = K \cap B_r(0)$, että

$$\langle F(x_r), y - x_r \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K_r. \quad (1.12)$$

Joukko $K_r \subseteq \mathbb{R}^n$ on suljettu ja rajoitettu, joten Heine-Borelin lauseen ja Lauseen 1.6 nojalla ongelmalla (1.12) on olemassa ratkaisu $x_r \in K_r$ aina, kun K_r on epätyhjä.

Esitetään nyt yhtäpitävä ehto variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisun olemassaololle.

Lause 1.9. *Variaatioepäyhtälöllä (1.1) on ratkaisu, jos ja vain jos on olemassa sellainen $r > 0$, että ongelman (1.12) ratkaisu $x_r \in K_r$ toteuttaa ehdon*

$$\|x_r\| < r.$$

Todistus. [6] Olkoon $x^* \in K$ variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu. Valitaan sellainen $r > 0$, että $r > \|x^*\|$. Tällöin $x^* \in K_r$. Koska variaatioepäyhtälö

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K$$

on voimassa ja $K_r \subseteq K$, pätee myös variaatioepäyhtälö

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K_r.$$

Näin ollen x^* on ongelman (1.12) ratkaisu.

Olkoon nyt $x_r \in K_r$ sellainen ongelman (1.12) ratkaisu, että $\|x_r\| < r$.
Olkoon $y \in K$ mielivaltainen. Koska $\|x_r\| < r$, on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $B_\varepsilon(x_r) \subseteq K_r$. Itse asiassa voidaan valita sellainen $\varepsilon > 0$, että $x_r + \varepsilon(y - x_r) \in K_r$. Oletuksen mukaan

$$\langle F(x_r), z - x_r \rangle \geq 0$$

aina, kun $z \in K_r$, joten erityisesti

$$\langle F(x_r), x_r + \varepsilon(y - x_r) - x_r \rangle \geq 0,$$

eli

$$\varepsilon \langle F(x_r), y - x_r \rangle \geq 0.$$

Jaetaan epäyhtälö puolittain vakiolla $\varepsilon > 0$, jolloin saadaan

$$\langle F(x_r), y - x_r \rangle \geq 0.$$

Piste $y \in K$ valittiin mielivaltaisesti ja $x_r \in K_r \subseteq K$, joten x_r on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu. \square

Edellisessä lauseessa esitetyn yhtäpitävän ehdon avulla voidaan johtaa monia variaatioepäyhtälön ratkaisun olemassaoloon riittäviä ehtoja. Erään tällaisen ehdon todistamista varten asetetaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 1.6. Olkoon $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Kuvaus $G : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *koersiivinen*, jos on olemassa sellainen piste $x_0 \in S$, että

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle G(x) - G(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = \infty.$$

Lause 1.10. Jos kohdefunktio F on koersiivinen, niin variaatioepäyhtälöllä (1.1) on ratkaisu.

Todistus. [6] Kuvauksen $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ koersiivisuus määritellään ehdolla

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = \infty \text{ eräässä pisteessä } x_0 \in K.$$

Koersiivisuusehdon ollessa voimassa on olemassa sellaiset vakiot $h > \|F(x_0)\|$ ja $r > \|x_0\|$, että

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} \geq h \quad \text{aina, kun } \|x\| \geq r.$$

Tällöin saadaan

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle \geq h \|x - x_0\| \quad \text{aina, kun } \|x\| \geq r,$$

josta edelleen

$$\langle F(x), x - x_0 \rangle - \langle F(x_0), x - x_0 \rangle \geq h \|x - x_0\| \quad \text{aina, kun } \|x\| \geq r.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \langle F(x), x - x_0 \rangle &\geq h \|x - x_0\| + \underbrace{\langle F(x_0), x - x_0 \rangle}_{\leq \|F(x_0)\| \|x - x_0\|} \\ &\geq h \|x - x_0\| - \|F(x_0)\| \|x - x_0\| \\ &= (h - \|F(x_0)\|) \underbrace{\|x - x_0\|}_{\geq \|x\| - \|x_0\|} \\ &\geq (h - \|F(x_0)\|) \underbrace{\|x\| - \|x_0\|}_{\geq \|x\| - \|x_0\|} \\ &\geq \underbrace{(h - \|F(x_0)\|)}_{>0} \underbrace{(\|x\|)}_{\geq r} \underbrace{- \|x_0\|}_{< r} \\ &> 0 \quad \text{aina, kun } \|x\| \geq r. \end{aligned}$$

Olkoon $x_r \in K_r$ ongelman (1.12) ratkaisu, eli

$$\langle F(x_r), x - x_r \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } x \in K_r.$$

Pisteelle $x_0 \in K$ pätee $\|x_0\| < r$, joten $x_0 \in B_r(0)$. Siis erityisesti $x_0 \in K_r$ ja

$$\langle F(x_r), x_0 - x_r \rangle \geq 0.$$

Kertomalla epäyhtälö vakiolla -1 saadaan

$$\langle F(x_r), x_r - x_0 \rangle \leq 0,$$

joten edellä tehdyn tarkastelun nojalla täytyy olla $\|x_r\| \not\geq r$. Täten $\|x_r\| < r$, jolloin Lauseen 1.9 nojalla piste x_r on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu. \square

Esimerkissä 2 (s. 16) tarkasteltiin yksiulotteista tilannetta, jossa variaatioepäyhtälön käypä joukko oli $K = \mathbb{R}$. Havaittiin, että kohdefunktion ollessa eksponenttifunktio $F(x) = e^x$ variaatioepäyhtälöllä (1.1) ei ole ratkaisua. Ratkeamattomuus johtuu siitä, että eksponenttifunktiolla e^x ei ole nollakohtaa käyvässä joukossa $K = \mathbb{R}$. Itse asiassa pätee:

Lemma 1.11. *Aina, kun variaatioepäyhtälöongelmassa käypä joukko $K =$ koko avaruus \mathbb{R}^n ja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, piste $x^* \in \mathbb{R}^n$ toteuttaa variaatioepäyhtälön (1.1) täsmälleen silloin, kun $F(x^*) = 0$.*

Todistus. [11] Jos $x^* \in \mathbb{R}^n$ on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu, niin $\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0$ aina, kun $y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin erityisesti piste $y = x^* - F(x^*) \in \mathbb{R}^n$ toteuttaa kyseisen epäyhtälön:

$$\langle F(x^*), -F(x^*) \rangle = - \underbrace{\|F(x^*)\|^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

Siis täytyy olla $\|F(x^*)\| = 0$, eli $F(x^*) = 0$.

Jos $F(x^*) = 0$, niin $\langle F(x^*), y - x^* \rangle = 0$ aina, kun $y \in K$. Siis x^* on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu. \square

Ongelmaa, jossa käypä joukko on rajoittamaton, eli $K = \mathbb{R}^n$, sanotaan *rajoittamattomaksi ongelmaksi*. Lemman 1.11 mukaan rajoittamattomassa variaatioepäyhtälöongelmassa variaatioepäyhtälö (1.1) on yhtäpitävä yhtälön $F(x^*) = 0$ kanssa. Sama pätee yleisesti joukon $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sisäpisteille:

Lemma 1.12. *Olkoon piste x^* joukon K sisäpiste. Tällöin x^* on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu, jos ja vain jos $F(x^*) = 0$.*

Todistus. [6] Olkoon x^* variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu, eli

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \text{ aina, kun } y \in K.$$

Koska x^* on joukon K sisäpiste, jokaiselle pisteelle $z \in \mathbb{R}^n$ on olemassa sellainen vakio $\varepsilon > 0$ ja sellainen piste $y \in K$, että $z = \varepsilon(y - x^*)$. Olkoon

$$\underbrace{-F(x^*)}_{\in \mathbb{R}^n} = \varepsilon(y - x^*).$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
 -\|F(x^*)\|^2 &= -\langle F(x^*), F(x^*) \rangle \\
 &= \langle F(x^*), -F(x^*) \rangle \\
 &= \langle F(x^*), \varepsilon(y - x^*) \rangle \\
 &= \underbrace{\varepsilon}_{>0} \underbrace{\langle F(x^*), y - x^* \rangle}_{\geq 0} \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Siis täytyy olla $F(x^*) = 0$. □

Avoimen joukon kaikki pisteet ovat sisäpisteitä, joten ottaen huomioon Lemman 1.12 on luonnollista, että variaatioepäyhtälöongelman (s. 7) käypä joukko asetettiin suljetuksi.

Annetaan vielä riittävä ehto variaatioepäyhtälön yksikäsitteisen ratkaisun olemassaololle.

Lause 1.13. *Jos kohdefunktio F on vahvasti monotoninen, niin variaatioepäyhtälöllä (1.1) on yksikäsitteinen ratkaisu.*

Todistus. Vahvan monotonisuuden määritelmän nojalla on olemassa sellainen vakio $\tau > 0$, että

$$\frac{\langle F(x) - F(y), x - y \rangle}{\|x - y\|} \geq \tau \|x - y\|$$

aina, kun $x, y \in K$ ja $x \neq y$. Asettamalla piste y kiinteäksi saadaan

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \tau \|x - y\| = \infty,$$

joten täytyy olla

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle F(x) - F(y), x - y \rangle}{\|x - y\|} = \infty.$$

Suoraan määritelmästä seuraa myös, että vahvasti monotoniselle kuvaukselle F pätee

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle > 0$$

aina, kun $x, y \in K$ ja $x \neq y$. Näin ollen vahvasti monotoninen kuvaus on sekä koersiivinen että aidosti monotoninen. Lauseiden 1.10 ja 1.8 nojalla ratkaisujoukko on epätyhjä ja ratkaisuita on enintään yksi. Siis yksikäsitteinen ratkaisu on olemassa. □

Luku 2

CR-menetelmistä

Tässä luvussa perehdytään variaatioepäyhtälöiden ratkaisemiseen kehitettyjen CR-menetelmien teoriaan ja toteutukseen. CR-menetelmien tarkastelu perustuu teoksen [7]. Apuna käytetään Luvun 1 tuloksia ja teosta [17].

CR-menetelmät ovat kaksivaiheisia iteratiivisia menetelmiä, joissa relaksaatioalgoritmeilla lasketaan aleneva suunta ja askelpituus. Näiden parametrien avulla voidaan määrätä hypertaso, joka erottaa toisistaan iteraatin ja ongelman ratkaisujoukon. Projisoimalla iteraatti hypertasolle saadaan siis monotoninen iteraattijono. Parametrien valintaperusteita ja relaksaatioalgoritmeja muuntamalla voidaan kehittää mitä moninaisimpia menetelmiä variaatioepäyhtälöiden ratkaisemiseen.

Eräs CR-menetelmien tärkeä ominaisuus on, että ne konvergoivat varsin lievästi rajoittavilla oletuksilla. Useimmille CR-menetelmille on osoitettu erilaisia konvergenssiasteita, jotka yleisesti vastaavat lineaarista konvergenssia. Mainitut ominaisuudet antavat olettaa CR-menetelmien kykenevän ratkaisemaan monimuotoisia variaatioepäyhtälön muotoon muuntuvia ongelmia.

2.1 CR-menetelmien perusidea

CR-menetelmät perustuvat *Newtonin menetelmän* kaltaisiin iteraatioihin.

Ratkaistaan epälineaarinen yhtälö $\phi(t) = 0$, missä $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti differentioituva. Newtonin menetelmä iteratiivisesti sovellettuna ratkaisee linearisoidun ongelman

$$\phi(t_k) + \phi'(t_k)(t - t_k) = 0,$$

missä t_k on iteraatti. Tästä saadaan tunnettu menetelmä

$$t_{k+1} := t_k - \frac{\phi(t_k)}{\phi'(t_k)},$$

joka tietyillä oletuksilla konvergoi kvadraattisesti kohti yhtälön $\phi(t) = 0$ ratkaisua t^* , eli

$$\|t_{k+1} - t^*\| \leq c \|t_k - t^*\|^2$$

eräällä vakiolla $c > 0$.

Newtonin menetelmästä on olemassa lukuisia muunnelmia ja laajennuksia. Eräs näistä soveltuu variaatioepäyhtälön (1.1), missä F on jatkuvasti differentioituva, ratkaisemiseen. Menetelmään kuuluu seuraavan linearisoidun ongelman ratkaiseminen: On löydettävä sellainen \bar{z} , että

$$\langle F(x^k) + \nabla F(x^k)(\bar{z} - x^k), y - \bar{z} \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K. \quad (2.1)$$

Tässä Newtonin menetelmässä iteraattia x^k seuraava iteraatti on $x^{k+1} := \bar{z}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Kuten edellä, tietyillä oletuksilla menetelmä konvergoi kvadraattisesti kohti variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisua.

Jacobin matriisin $\nabla F(x^k)$ määrittäminen jokaisella iteraatiokierroksella voi olla turhan työlästä, eikä $\nabla F(x^k)$ välttämättä ole positiivisesti definiitti. (Jos kuvauksen F Jacobin matriisi on positiivisesti definiitti, kuvaus F on aidosti monotoninen, ja Lauseen 1.8 nojalla ongelman (2.1) ratkaisu on yksikäsitteinen.) Hieman tuonnempana tarkastellankin menetelmää, jossa Jacobin matriisi korvataan positiivisesti definiitillä $n \times n$ -matriisilla A_k .

Olkkoon $V \subseteq \mathbb{R}^n$ konvekssi joukko ja olkkoon $K \subseteq V$ sen osajoukko. Määritellään kuvausjoukko $\{ T_k : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n \mid k = 0, 1, 2, \dots \}$ asettamalla (kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$)

(A1) $T_k(x, \cdot)$ on vahvasti monotoninen vakiolla $\tau'_k > 0$ aina, kun $x \in K$;

(A2) $T_k(x, x) = 0$ aina, kun $x \in V$.

Tarkastellaan iteratiivista menetelmää, jossa ongelman (2.1) tilalla on seuraava ongelma: Olkoon $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k > 0$ annettu jokaisella iteraatiokierroksella k . On löydettävä sellainen $\bar{z} \in K$, että

$$\langle F(x^k) + \lambda_k^{-1} T_k(x^k, \bar{z}), y - \bar{z} \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K. \quad (2.2)$$

Lause 2.1. *Ongelmalla (2.2) on yksikäsitteinen ratkaisu.*

Todistus. Väite seuraa ominaisuudesta (A1) ja Lauseesta 1.13. □

Lause 2.2. *Ongelman (2.2) ratkaisulle \bar{z} on voimassa*

$$\langle F(x^k), x^k - \bar{z} \rangle \geq \lambda_k^{-1} \langle T_k(x^k, \bar{z}), \bar{z} - x^k \rangle \geq \lambda_k^{-1} \tau'_k \|\bar{z} - x^k\|^2. \quad (2.3)$$

Todistus. Ongelman (2.2) ratkaisu \bar{z} toteuttaa epäyhtälön

$$\langle F(x^k) + \lambda_k^{-1} T_k(x^k, \bar{z}), y - \bar{z} \rangle \geq 0$$

kaikilla $y \in K$. Erityisesti iteraatti $x^k \in K$, joten

$$\langle F(x^k) + \lambda_k^{-1} T_k(x^k, \bar{z}), x^k - \bar{z} \rangle \geq 0.$$

Käyttämällä sisätulon ominaisuuksia saadaan

$$\langle F(x^k), x^k - \bar{z} \rangle + \lambda_k^{-1} \langle T_k(x^k, \bar{z}), x^k - \bar{z} \rangle \geq 0$$

ja edelleen

$$\langle F(x^k), x^k - \bar{z} \rangle \geq -\lambda_k^{-1} \langle T_k(x^k, \bar{z}), x^k - \bar{z} \rangle,$$

mistä seuraa väitteen (2.3) ensimmäinen epäyhtälö

$$\langle F(x^k), x^k - \bar{z} \rangle \geq \lambda_k^{-1} \langle T_k(x^k, \bar{z}), \bar{z} - x^k \rangle.$$

Ominaisuuden (A2) nojalla

$$\langle T_k(x^k, \bar{z}), \bar{z} - x^k \rangle = \langle T_k(x^k, \bar{z}) - T_k(x^k, x^k), \bar{z} - x^k \rangle,$$

mistä ominaisuuden (A1) ja Määritelmän 1.4.a nojalla saadaan

$$\langle T_k(x^k, \bar{z}), \bar{z} - x^k \rangle \geq \tau'_k \|\bar{z} - x^k\|^2.$$

Kertomalla epäyhtälö puolittain vakiolla λ_k^{-1} saadaan väite. □

Seuraava lause osoittaa tarkasteltavan iteratiivisen menetelmän mielekkyyden. Lauseen mukaan menetelmä konvergoidessaan ratkaisee variaatioepäyhtälön (1.1).

Lause 2.3. *Iteraatti x^k on ongelman (2.2) ratkaisu \bar{z} , jos ja vain jos x^k on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $\bar{z} = x^k$ ongelman (2.2) ratkaisu. Tällöin

$$\langle F(x^k) + \underbrace{\lambda_k^{-1} T_k(x^k, x^k)}_{=0}, y - x^k \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K,$$

toisin sanoen x^k on variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu.

Olkoon nyt x^k variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisu, toisin sanoen $x^k \in K^*$. Oletetaan, että $x^k \neq \bar{z}$ (\bar{z} on ongelman (2.2) ratkaisu). Lauseen 2.2 mukaan

$$\langle F(x^k), x^k - \bar{z} \rangle \geq \lambda_k^{-1} \tau'_k \|\bar{z} - x^k\|^2.$$

Kertomalla epäyhtälö puolittain vakiolla -1 saadaan

$$-\langle F(x^k), x^k - \bar{z} \rangle \leq -\lambda_k^{-1} \tau'_k \|\bar{z} - x^k\|^2,$$

josta edelleen

$$\langle F(x^k), \bar{z} - x^k \rangle \leq - \underbrace{\lambda_k^{-1}}_{>0} \underbrace{\tau'_k}_{>0} \underbrace{\|\bar{z} - x^k\|^2}_{>0} < 0$$

Tässä \bar{z} on ongelman (2.2) ratkaisu, joten $\bar{z} \in K$. On siis löydetty $y \in K$, jolle $\langle F(x^k), y - x^k \rangle < 0$. Tämä on ristiriita oletuksen $x^k \in K^*$ kanssa. Siis oletuksesta $x^k \in K^*$ seuraa väite $x^k = \bar{z}$. \square

On toivottavaa, että ongelman (2.2) ratkaisemiseen olisi olemassa toimiva algoritmi. Jotta voitaisiin puhua relaksaatiomenetelmästä, olisi ongelman (2.2) oltava yksinkertaisempi kuin alkuperäisen ongelman (1.1). Näin on esimerkiksi, jos jokaisella k valitaan

$$T_k(x, z) = A_k(z - x),$$

missä $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on positiivisesti definiitti matriisi. Tällöin rajoittamaton ongelma (2.2) on Lemman 1.11 nojalla yhtäpitävä lineaarisen yhtälöryhmän kanssa. Näin ollen ainakin rajoittamattoman ongelman tapauksessa toimiva

algoritmi on olemassa.

Mikäli matriisi A_k ”approksimoi” kuvauksen F Jacobin matriisiä, säilyttää tarkasteltava menetelmä Newtonin menetelmän nopean konvergenssin. Jos $\nabla F(x^k)$ on positiivisesti definiitti, voidaan nopean konvergenssin menetelmään valita $A_k = \nabla F(x^k)$.

On päädytty menetelmään, jossa ongelman (2.2) tilalla on seuraava ongelma: Olkoon $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiivisesti definiitti ja $\lambda_k > 0$ jokaisella iteraatiokierroksella k . On löydettävä sellainen $\bar{z} \in K$, että

$$\langle F(x^k) + \lambda_k^{-1} A_k(\bar{z} - x^k), y - \bar{z} \rangle \geq 0 \text{ aina, kun } y \in K. \quad (2.4)$$

Piste $\bar{z} \in K$ on ongelman (2.4) ratkaisu, jos ja vain jos \bar{z} on matriisin A_k generoima pisteen $x^k - \lambda_k A_k^{-1} F(x^k)$ projektio joukolle K [7], eli

$$\bar{z} = Pr_K^{A_k}(x^k - \lambda_k A_k^{-1} F(x^k)).$$

Näin ollen valinta $A_k \equiv I$ ongelmassa (2.4) antaa *projektiomenetelmän*

$$x^{k+1} := Pr_K(x^k - \lambda_k F(x^k)),$$

missä luku $\lambda_k > 0$ on niin sanottu askelpituusparametri. Kyseessä on siis iteratiivinen menetelmä, jossa osaongelma (2.4) on muotoa

$$\langle F(x^k) + \lambda_k^{-1}(\bar{z} - x^k), y - \bar{z} \rangle \geq 0 \text{ aina, kun } y \in K. \quad (2.5)$$

Lauseen 1.5 mukaan projektiomenetelmä antaa variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisun iteraatiokierroksella k , jos ja vain jos

$$Pr_K(x^k - \lambda_k F(x^k)) = x^k;$$

tällöinhän epäyhtälössä (2.5) $\bar{z} = x^k$, joten

$$\langle F(x^k), y - x^k \rangle \geq 0 \text{ aina, kun } y \in K.$$

2.2 Perusominaisuuksia

Tarkastellaan aluksi toista tapaa laajentaa Newtonin menetelmää

$$t_{k+1} := t_k - \frac{\phi(t_k)}{\phi'(t_k)}.$$

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ei-negatiivinen jatkuvasti differentioituva konvekssi funktio. Etsitään funktion f nollakohtaa, eli pistettä $x^* \in \mathbb{R}^n$, jolle $f(x^*) = 0$. Ratkaisu on löydettävissä *gradienttimenetelmällä*

$$x^{k+1} := x^k - \frac{f(x^k)}{\|\nabla f(x^k)\|^2} \nabla f(x^k),$$

missä iteraatti x^{k+1} ratkaisee linearisoidun ongelman

$$f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle = 0.$$

Esitetään nyt gradienttimenetelmän geometrinen tulkinta. Olkoon

$$H_k = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle = -f(x^k) \}.$$

Hypertaso H_k erottaa iteraatin x^k ongelman $f(x^*) = 0$ ratkaisujoukosta:

$$\langle \nabla f(x^k), x^k - x^k \rangle = 0 \geq -f(x^k);$$

toisaalta konveksille funktiolle $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pätee [17]

$$\langle \nabla f(x^k), x^* - x^k \rangle \leq f(x^*) - f(x^k),$$

eli (kun $f(x^*) = 0$)

$$\langle \nabla f(x^k), x^* - x^k \rangle \leq -f(x^k).$$

Nähdään, että x^{k+1} on pisteen x^k projektio hypertasolle H_k . Näin ollen iteraatin x^{k+1} etäisyys mihin tahansa ongelman $f(x^*) = 0$ ratkaisuun on pienempi kuin iteraatin x^k :

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \frac{f(x^k)^2}{\|\nabla f(x^k)\|^2}.$$

Sovelletaan seuraavaksi edellä kuvattua lähestymistapaa variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisemiseen.

Määritelmä 2.1. Olkoon $W \subseteq \mathbb{R}^n$ epätyhjä suljettu joukko. Kuvaus $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on

- (a) *käypä* joukossa W , jos $P(x) \in W$ aina, kun $x \in \mathbb{R}^n$;
- (b) *kvasi-ei-laajentava* joukossa W , jos $\|P(x) - y\| \leq \|x - y\|$ aina, kun $x \in \mathbb{R}^n$ ja $y \in W$.

Merkitään

$$\mathcal{F}(W) = \{ P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid P \text{ on käypä ja kvasi-ei-laajentava joukossa } W \}.$$

Tarkastellaan iteraattijonoa $\{x^k\}$, joka toteuttaa seuraavat säännöt:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &:= P_k(\tilde{x}^{k+1}) \\ P_k &\in \mathcal{F}(K) \\ \tilde{x}^{k+1} &:= x^k - \gamma_k \sigma_k g^k \\ \gamma_k &\in [0, 2] \\ \langle g^k, x^k - x^* \rangle &\geq \sigma_k \|g^k\|^2 \geq 0 \text{ aina, kun } x^* \in K^d. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nähdään, että x^{k+1} on pisteen x^k projektio hypertasolle

$$H_k(\gamma_k) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle g^k, x - x^k \rangle = -\gamma_k \sigma_k \|g^k\|^2 \}.$$

Kuten edellä, hypertaso $H_k(1)$ erottaa pisteen x^k ratkaisujoukosta K^d . Yleisesti hypertasolla $H_k(\gamma_k)$ ei ole tätä ominaisuutta. Yleisesti pätee kuitenkin, että etäisyys pisteestä \tilde{x}^{k+1} ratkaisujoukkoon K^d ei voi olla suurempi kuin pisteestä x^k . Sama pätee pisteelle x^{k+1} :

Lause 2.4. *Olkoon $x^* \in K^d$ ja olkoon piste x^{k+1} valittu säännöillä (2.6). Tällöin pätee*

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \gamma_k(2 - \gamma_k)\sigma_k^2 \|g^k\|^2.$$

Todistus. Sääntöjen (2.6) ja Määritelmän 2.1.b nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|P_k(\tilde{x}^{k+1}) - x^*\|^2 \\ &\leq \|\tilde{x}^{k+1} - x^*\|^2 = \|x^k - \gamma_k \sigma_k g^k - x^*\|^2 \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k \sigma_k \langle g^k, x^k - x^* \rangle + \gamma_k^2 \sigma_k^2 \|g^k\|^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k \sigma_k^2 \|g^k\|^2 + \gamma_k^2 \sigma_k^2 \|g^k\|^2 \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - \gamma_k(2 - \gamma_k)\sigma_k^2 \|g^k\|^2. \end{aligned}$$

□

Seuraus 2.5. Olkoon piste x^{k+1} valittu säännöillä (2.6). Tällöin

- (i) jono $\{x^k\}$ on rajoitettu;
- (ii) jos $x^* \in K^d$ on jonon $\{x^k\}$ kasautumispiste, niin $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$;
- (iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(2 - \gamma_k)\sigma_k^2 \|g^k\|^2 < \infty$.

Seurauksen 2.5 kohdan (i) nojalla jonolla $\{x^k\}$ on kasautumispisteitä, joten kohdan (ii) mukaan riittää osoittaa, että eräs niistä kuuluu joukkoon $K^d \subseteq K^*$.

Säännöt (2.6) eivät anna ohjeita parametrien σ_k ja g^k valintaan. Tarkastellaan seuraavaksi erästä perusmenettelyä, jota noudattamalla voidaan konstruoida käytännössä toteutettavia iteratiivisia menetelmiä.

Perusmenettely. Valitaan piste $x^0 \in K$ ja jono $\{\gamma_k\}$, missä $\gamma_k \in [0, 2]$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$ ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(2 - \gamma_k) = \infty. \quad (2.7)$$

Valitaan lisäksi kuvausjoukko $\{P_k \in \mathcal{F}(K) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$.

Iteraatiokierroksella k iteraatti on $x^k \in K$.

Askel 1: Käytä proseduuria D_k ja aseta $y^k := D_k(x^k)$. Jos $F(y^k) = 0$, lopeta.

Askel 2: Aseta

$$\begin{aligned} g^k &:= F(y^k) \\ \sigma_k &:= \frac{\langle g^k, x^k - y^k \rangle}{\|g^k\|^2} \\ x^{k+1} &:= P_k(x^k - \gamma_k \sigma_k g^k) \\ k &:= k + 1 \end{aligned}$$

ja siirry askeleeseen 1.

Proseduurilla D_k etsitään piste $y^k \in K$, jolle $\langle F(y^k), x^k - y^k \rangle > 0$, kun $x^k \notin K^*$. Jos $x^* \in K^d$, niin

$$\begin{aligned}
 \langle g^k, x^k - x^* \rangle &= \langle F(y^k), x^k - y^k + y^k - x^* \rangle \\
 &= \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle + \underbrace{\langle F(y^k), y^k - x^* \rangle}_{\geq 0 \text{ (} x^* \in K^d \text{)}} \\
 &\geq \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle \\
 &= \langle g^k, x^k - y^k \rangle \\
 &= \sigma_k \|g^k\|^2.
 \end{aligned}$$

Näin ollen perusmenettelyä noudattamalla saatu iteraattijono $\{x^k\}$ toteuttaa ehdot (2.6), joten Seurauksen 2.5 väitteet pätevät myös tälle (Perusmenettelyllä konstruoidulle) jonolle. Seurauksesta 2.5 (iii) ja ehdosta (2.7) saadaan

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (\sigma_k \|g^k\|^2) = 0.$$

Jos tästä ehdosta seuraa, että jonon $\{x^k\}$ kasautumispiste kuuluu joukkoon K^d , niin Seurauksen 2.5 (ii) nojalla $\{x^k\}$ konvergoi kohti variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisua.

Proseduuri D_k olisi siis toteutettava niin, että eräälle kasautumispisteelle x^* olisi voimassa

$$\langle F(y), y - x^* \rangle \geq 0 \text{ aina, kun } y \in K.$$

Tällöin saadaan variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisemiseen kaksivaiheinen iteratiivinen menetelmä, joka konvergoi, jos duaalivariaatioepäyhtälöllä on olemassa ratkaisu. Lauseen 1.7 mukaan tähän riittää kohdefunktion pseudo-monotonisuus. (Tässä vaiheessa on luonnollista olettaa, että ratkaistavalla ongelmalla (1.1) on ratkaisu.)

Projektio-operaattori $Pr_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ on kvasi-ei-laajentava (itseasiassa jopa ei-laajentava [7]), joten se voidaan valita tarkasteltavan menetelmän proseduuriksi D_k .

2.3 CR-menetelmän toteuttaminen

Tässä kappaleessa muodostetaan CR-menetelmä ja esitetään sitä koskeva konvergenssitulos. Tarkastellaan edelleen variaatioepäyhtälöä (1.1), sen kohdefunktiota F , (epätyhjää suljettua konveksia) käypää joukkoa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ja ratkaisujoukkoa K^* sekä duaalivariaatioepäyhtälön (1.10) ratkaisujoukkoa K^d .

Määritelmä 2.2. Olkoon $V \subseteq \mathbb{R}^n$ konvekksi ja olkoon $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Kuvaus T on *Lipschitz-jatkuva* vakiolla L , jos jokaiselle pisteparille $u, v \in V$ pätee

$$\|T(u) - T(v)\| \leq L\|u - v\|.$$

Kuvaus $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *paikallisesti Lipschitz-jatkuva*, jos se on Lipschitz-jatkuva jokaisessa joukon V rajoitetussa osajoukossa.

Tässä kappaleessa ovat voimassa seuraavat oletukset:

$$\begin{aligned} K^d &\neq \emptyset; \\ V &\subseteq \mathbb{R}^n \text{ on suljettu konvekssi joukko, jolle } K \subseteq V; \\ F : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \text{ on paikallisesti Lipschitz-jatkuva.} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Esitetään seuraavaksi Perusmenettelyä (s. 28) noudattava CR-menetelmä. Tämän jälkeen osoitetaan menetelmän konvergenssi oletuksilla (2.8).

Menetelmä 1.

Askel 0 (alustus): Valitaan piste $x^0 \in K$ ja jono $\{\gamma_k\}$, missä $\gamma_k \in [0, 2]$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$ ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(2 - \gamma_k) = \infty.$$

Valitaan kuvausjoukko $\{T_k : K \times K \rightarrow \mathbb{R}^n \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$, jonka kuvaukset toteuttavat ehdot

(B1) $T_k(x, \cdot)$ on vahvasti monotoninen vakiolla $\tau'_k > 0$ aina, kun $x \in K$;

(B2) $T_k(x, \cdot)$ on Lipschitz-jatkuva vakiolla $\tau''_k > 0$ aina, kun $x \in K$;

(B3) $T_k(x, x) = 0$ aina, kun $x \in V$.

Valitaan lisäksi kuvausjoukko $\{ P_k \in \mathcal{F}(K) \mid k = 0, 1, 2, \dots \}$. Valitaan luvut $\alpha, \beta \in]0, 1[$ ja $\tilde{\theta} > 0$, ja asetetaan $k := 0$.

Iteraatiokierroksella k iteraatti on $x^k \in K$.

Askel 1 (proseduuri D_k): Etsi sellainen $z^k \in K$, että

$$\langle F(x^k) + T_k(x^k, z^k), y - z^k \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } y \in K.$$

Aseta $p^k := z^k - x^k$. Jos $p^k = 0$, lopeta.

Määritä m , joka on pienin luonnollinen luku, jolle $x^k + \beta^m \tilde{\theta} p^k \in K$ ja

$$\langle F(x^k + \beta^m \tilde{\theta} p^k), p^k \rangle \leq \alpha \langle F(x^k), p^k \rangle.$$

Aseta $\theta_k := \beta^m \tilde{\theta}$ ja $y^k := x^k + \theta_k p^k$. Jos $F(y^k) = 0$, lopeta.

Askel 2 (iteraatio): Aseta

$$\begin{aligned} g^k &:= F(y^k) \\ \sigma_k &:= \frac{\langle g^k, x^k - y^k \rangle}{\|g^k\|^2} \\ x^{k+1} &:= P_k(x^k - \gamma_k \sigma_k g^k) \\ k &:= k + 1 \end{aligned}$$

ja siirry askeleeseen 1.

Menetelmän 1 askeleessa 1 on jokaisella iteraatiolla ratkaistava osaongelma (2.2), missä $\lambda_k \equiv 1$. Näin ollen Lauseen 2.3 nojalla voidaan todeta, että $p^k = 0$, jos ja vain jos $x^k \in K^*$. Jos taas $p^k \neq 0$ ja $F(y^k) \neq 0$, saadaan iteraatiossa proseduurin D_k ja Lauseen 2.2 avulla

$$\|g^k\|^2 = \|F(y^k)\|^2 > 0$$

ja

$$\begin{aligned} \langle g^k, x^k - y^k \rangle &= \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle = \langle F(y^k), -\theta_k p^k \rangle \\ &= -\theta_k \langle F(y^k), p^k \rangle = -\theta_k \langle F(x^k + \beta^m \tilde{\theta} p^k), p^k \rangle \\ &\geq -\alpha \theta_k \langle F(x^k), p^k \rangle = -\alpha \theta_k \langle F(x^k), z^k - x^k \rangle \\ &= \alpha \theta_k \langle F(x^k), x^k - z^k \rangle \geq \alpha \theta_k \tau'_k \|z^k - x^k\|^2 > 0, \end{aligned}$$

jolloin $\sigma_k > 0$. Jos $x^* \in K^d$, niin

$$\begin{aligned}
\langle g^k, x^k - x^* \rangle &= \langle F(y^k), x^k - y^k + y^k - x^* \rangle \\
&= \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle + \underbrace{\langle F(y^k), y^k - x^* \rangle}_{\geq 0 \text{ (} x^* \in K^d \text{)}} \\
&\geq \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle \\
&= \langle g^k, x^k - y^k \rangle \\
&= \sigma_k \|g^k\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen myös Menetelmää 1 noudattamalla saatu iteraattijono $\{x^k\}$ toteuttaa ehdot (2.6), joten Lauseen 2.4 ja Seurauksen 2.5 väitteet pätevät.

Oletetaan, että ehtojen (B1)-(B3) lisäksi jokaisella indeksillä $k = 0, 1, 2, \dots$ pätee

$$(B4) \quad 0 < \tau' \leq \tau'_k \leq \tau''_k \leq \tau'' < \infty.$$

Lemma 2.6. *Menetelmän 1 proseduurilla D_k konstruoitu jono $\{z^k\}$ on rajoitettu.*

Todistus. Lauseen 2.2 nojalla

$$\langle F(x^k), x^k - z^k \rangle \geq \tau'_k \|z^k - x^k\|^2,$$

eli

$$\langle F(x^k), z^k - x^k \rangle \leq -\tau'_k \|z^k - x^k\|^2.$$

Toisaalta Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\langle F(x^k), x^k - z^k \rangle \leq \|F(x^k)\| \|x^k - z^k\|,$$

joten

$$\langle F(x^k), z^k - x^k \rangle \leq -\|F(x^k)\| \|x^k - z^k\|.$$

Näin ollen

$$-\|F(x^k)\| \|x^k - z^k\| \leq \langle F(x^k), z^k - x^k \rangle \leq -\tau'_k \underbrace{\|z^k - x^k\|}_{=\|x^k - z^k\|}^2,$$

eli

$$\|F(x^k)\| \|x^k - z^k\| \geq \tau'_k \|x^k - z^k\|^2.$$

Jos proseduurissa ei saavuteta lopetusehtoa $p^k = 0$, saadaan edellisestä ja oletuksesta (B4)

$$\|F(x^k)\| \geq \tau' \|x^k - z^k\|,$$

eli

$$\|x^k - z^k\| \leq \frac{1}{\tau'} \|F(x^k)\|.$$

Oletusten (2.8) nojalla funktio F on paikallisesti Lipschitz-jatkuva, ja Seurauksen 2.5 nojalla jono $\{x^k\}$ on rajoitettu, joten edellisen nojalla myös jono $\{z^k\}$ on rajoitettu. \square

Lause 2.7. Jos $K^* = K^d$, Menetelmä 1 ratkaisee variaatioepäyhtälön (1.1).

Todistus. Jaetaan todistus kahteen osaan, joissa Menetelmällä 1 tuotettu iteraattijono $\{x^k\}$ on (i) äärellinen ja (ii) ääretön.

(i) Jos jono $\{x^k\}$ on äärellinen, menetelmän lopetusehto täyttyy eräällä indeksillä k , eli $p^k = 0$ tai $F(y^k) = 0$. Jos $p^k = 0$, on Lauseen 2.3 nojalla $x^k \in K^*$. Jos $F(y^k) = 0$, saadaan välittömästi $y^k \in K^*$.

(ii) Jos jono $\{x^k\}$ on ääretön, on olemassa [7] jonon $\{x^k\}$ kasautumispiste $x^* \in K^*$ (tähän tarvitaan edellistä lemmaa). Koska $x^* \in K^* = K^d$, saadaan Seurauksen 2.5 nojalla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*.$$

\square

Luku 3

Verkkosovellutuksia

Tässä luvussa tarkastellaan liikenneverkkoja, joiden reititystä optimoidaan variaatioepäyhtälöiden ja edellisessä luvussa esitettyjen menetelmien avulla. Erityisenä esimerkkinä käsitellään ad hoc -tietoliikenneverkkoa.

Tavoitteena on kehittää menetelmä, jolla verkon liikenne ohjataan käyttökustannusten mukaan jaettuna kaikille käytettävissä oleville reiteille, eli ”tasapainotetaan”. Tällä menetelmällä voidaan pakettikytkentäisen tietoliikenneverkon liikennettä optimoida ruuhkautumisen välttämiseksi.

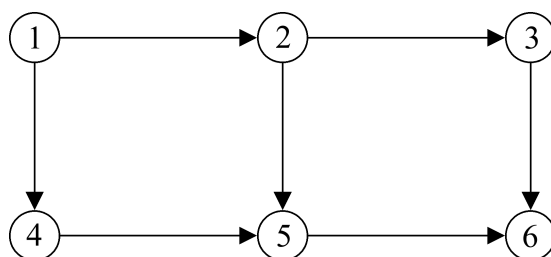
Verkon tasapainottamista on, kuten montaa muutakin verkkoja koskevaa teoriaa, sovellettu ensin yleisen liikenneverkon liikenteen ohjaukseen ja sittemmin alettu yhdistämään tietoliikenneverkkoihin. Liikenteen tasapainottamiselle löytyy runsaasti soveltamiskohteita monista nykyaikaisista verkkoarkkitehtuureista. Aihetta tutkitaan jatkuvasti, ja tulevaisuudessa tullaan näkemään yhä uusia tasapainotussovellutuksia.

3.1 Verkoista

Määritellään aluksi verkko ja siihen liittyviä käsitteitä matemaattisesti. Tämän jälkeen esitellään lyhyesti erilaisten tietoliikenneverkkojen toimintaa.

Määritelmä 3.1. [2] *Verkko* on järjestetty pari $G = (V, E)$, missä $V \neq \emptyset$ on äärellinen *solmujen* joukko ja relaatio $E \subseteq V \times V$ on *linkkien* joukko.

Suunnatussa verkossa $G = (V, E)$ linkit muodostuvat järjestetyistä pareista $(x, y) \in V \times V$. Jos relaatio $E \subseteq V \times V$ on symmetrinen (eli $(x, y) \in E$, jos ja vain jos $(y, x) \in E$), sanotaan verkkoa $G = (V, E)$ *suuntaamattomaksi verkoksi*.



Kuva 3.1: Suunnattu verkko.

Kuvassa 3.1 on esimerkki suunnatusta verkosta. Tässä verkossa solmujen joukko on

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ja linkkien joukko

$$V = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}.$$

Kuvassa 1 (s. 2) esitetty verkko on esimerkki suuntaamattomasta verkosta. Jatkossa puhuttaessa verkosta tarkoitetaan suuntaamatonta verkkoa. Määritellään joitakin (suuntaamattoman) verkon käsitteitä.

Määritelmä 3.2. Olkoot $x = x_0$ ja $y = x_n$ verkon $G = (V, E)$ solmuja. Jono

$$p = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

on verkon G *polku*, jos

$$x_i \in V \text{ kaikilla } i = 0, \dots, n$$

$$(x_i, x_{i+1}) \in E \text{ kaikilla } i = 0, \dots, n - 1$$

$$x_i \neq x_j \text{ kaikilla } i \neq j.$$

Luku n on polun p *pituus*. Solmu $x = x_0$ on polun p *alkusolmu* ja $y = x_n$ sen *loppusolmu*; merkitään $p = p(x, y)$.

Verkko $G = (V, E)$ on *yhtenäinen*, jos on olemassa verkon polku $p(x, y)$ aina, kun $x, y \in V$ ja $x \neq y$.

Tietoliikenneverkoissa solmut ovat päätelaitteita (esim. matkapuhelimia) ja linkit niiden välisiä yhteyksiä (esim. radiolinkkejä). Tietoliikenneverkoista puhuttaessa voidaan polkujen sijaan puhua verkon solmujen välisistä *reiteistä*.

Pakettikytkentäinen verkko tarkoittaa tietoliikenneverkkoa, jossa solmujen toisilleen lähettämä data jaetaan ”paketteihin”, jotka siirretään verkossa yksitellen. Reititystä varten kuhunkin pakettiin liitetään kohdesolmun osoite. Verkon solmupisteissä olevat reitittimet pitävät yllä (tai hankkivat tarvittaessa) reititystietoa, jonka mukaan ne käsittelevät saamansa paketit. Näin paketit etenevät yhden solmuvälin kerrallaan päätyen lopulta kohdesolmuunsa. Kullakin solmuvälillä liikkuu vuorotellen eri käyttäjien paketteja. Solmupisteissä paketit varastoidaan jonoihin odottamaan lähetysvuoroa. Paketit jonottavat päästäkseen vuorollaan eteenpäin, ja ruuhkaisessa verkossa odotusajat voivat venyä hyvinkin pitkiksi.

Langattomissa verkoissa mobiilit päätelaitteet (solmut) voivat liikkua toistensa suhteen mielivaltaisilla nopeuksilla. Lisäksi solmut voivat liittyä verkkoon ja poistua verkosta milloin tahansa. Tyypillisessä langattomassa verkossa on kiinteä runkoverkko. Esimerkiksi matkapuhelinverkot sisältävät tukiasemaverkon, joka rakennetaan palvelemaan tiettyä määrää käyttäjiä tukiasemien peittoalueella. Verkon käyttäjän päätelaite kommunikoi lähimmän vapaan tukiaseman kanssa, ja runkoverkko etsii käyttäjän haluaman päätelaitteen niin sanottujen vierailijarekisterien avulla. Matkapuhelinverkossa ei käytetä pakettikytkentää, vaan kahden matkapuhelimen välille kytketään yhteys koko puhelun ajaksi. Näin ollen ei voida käyttää myöskään reititystä eikä siihen liittyviä ruuhkautumisen vaatimia vastatoimia. Matkapuhelinverkon ruuhkautumista voidaan välttää ennakoivalla peittoaluesuunnittelulla runkoverkon rakentamisen yhteydessä (ks. [8]).

Ad hoc -radioverkko

Toinen verkkotyyppi mobiilien langattomien verkkojen joukossa on pakettikytkentäinen ad hoc -verkko, jonka erityispiirteenä on kiinteän rakenteen puuttuminen. Tämä tarkoittaa sitä, että ”tavallisen” verkon tukiasemia vastaavia keskuksia ei ole, vaan linkkien muodostaminen jää verkon solmujen tehtäväksi. Ad hoc -verkon rakenteettomuus jättää solmujen tehtäväksi myös haasteellisen reitityksen. Liikkuvien solmujen väliin muodostetut linkit katkeavat, kun solmut siirtyvät pois toistensa kuuluvuusalueelta. Tämä aiheuttaa jatkuvan reittien päivitystarpeen. Reittien muodostamista ja ylläpitoa varten kerättävää reititystietoa hankkiessaan verkon solmut lähettävät toisilleen suuren määrän erilaisia kyselyitä ja vastauksia. Tämä niin sanottu kontrolliliikenne aiheuttaa helposti verkon ruuhkautumista. Näihin haasteisiin vastaamaan on kehitetty erityisiä ad hoc -reititysprotokollia, jotka kukin tavallaan pyrkivät välttämään verkon ruuhkautumista.

Ad hoc -verkkojen reititysprotokollat jaetaan toimintatapojensa perusteella proaktiivisiin ja reaktiivisiin protokolleihin. Proaktiivista protokollaa käytettäessä verkon solmut pyrkivät ylläpitämään ajan tasalla olevat reitit jokaiseen verkon solmuun. Tällä menettelyllä pyritään siihen, että solmujen lähettäessä datapaketteja välittäjäsolmut tietävät välittömästi (jo olemassa olevan reititystiedon perusteella), miten toimia kunkin datapaketin kohdalla. Toimiessaan tämä menettelytapa aiheuttaisi näin ollen mahdollisimman pienet viiveet datapakettien siirrossa. Reaktiivista protokollaa käytettäessä reitti haetaan vasta kun sitä tarvitaan. Näin ollen ”turha” kontrolliliikenne jää pois, toisin sanoen solmut eivät pidä yllä reittejä, joita ei käytetä. Proaktiivisten ja reaktiivisten protokollien tehokkuutta on tutkittu ja vertailtu paljon (ks. esim. [13, 14]). Vertailuissa tehokkuuden mittareina käytetään simuloinneissa havaittuja datapakettien keskimääräistä viivettä, datapakettien vastaanottoprosenttia sekä kontrolliliikenteen määrää suhteessa lähetettyjen datapakettien määrään. Simuloinneissa on todettu intuitiivisestikin selvältä tuntuva tulos: proaktiiviset protokollat ovat tehokkaampia hidasliikkeisissä verkoissa, joissa on vähän solmuja; reaktiiviset protokollat ovat suhteessa proaktiivisiin protokolleihin sitä tehokkaampia mitä nopealiikkeisempiä ja suurempia verkot ovat.

3.2 Verkon tasapainotila

Tässä kappaleessa esitetään malli yleisen liikenneverkon tasapainottamiseen. Yleisen liikenneverkon mallin pohjalta kehitetään tietoliikenneverkoille soveltuva tasapainomalli ja tietoliikenneverkon liikennettä tasapainottava variaatioepäyhtälöongelma.

Esitetään tarvittavat merkinnät, minkä jälkeen asetetaan verkon tasapainoehdot ja määritellään tasapainotila.

Tarkastellaan yhdistettyä verkkoa $G = (N, L)$, jossa on n solmua ja m linkkiä. Sovitaan mukavuussyistä, että verkossa kuljetettava hyödyke on paketteja (vrt. tietoliikenneverkon datapaketit). Oletetaan, että tarkasteltavassa verkossa G on J kappaletta järjestettyjä solmupareja, joissa ensimmäinen solmu lähettää paketteja jälkimmäiselle solmulle. Sanotaan näitä solmupareja lähde-kohdesolmu -pareiksi; lyhyemmin *OD-pareiksi* (Origin, Destination). Merkitään OD-parien muodostamaa joukkoa $W \subseteq N \times N$. Oletetaan, että OD-parien välisiä polkuja on yhteensä M kappaletta. Merkitään näiden polkujen joukkoa P .

Liikennevirta on tarkasteltavalla solmuvälillä liikennöivien pakettien lukumäärä tietyssä aikayksikössä.

Olkoon f_i linkin a_i liikennevirta kullakin $i = 1, 2, \dots, m$. Tällöin vektori

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \in \mathbb{R}_+^m$$

on verkon G *linkkivirtausvektori* tai *linkkivirtaus*. Olkoon vastaavasti x_j polun p_j liikennevirta kullakin $j = 1, 2, \dots, M$. Tällöin vektori

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_M)^T \in \mathbb{R}_+^M$$

on verkon G *polkuvirtausvektori* tai *polkuvirtaus*. Asetetaan indikaattori

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos linkki } a_i \text{ on polulla } p_j \\ 0 & \text{muuten} \end{cases},$$

jonka avulla saadaan linkki- ja polkuvirtauksille vastaavuusehto

$$f_i = \sum_{j=1}^M \delta_{ij} x_j \quad \text{kaikilla } i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.1)$$

Verkon linkeille a_1, a_2, \dots, a_m määritellään *linkkikustannukset* c_1, c_2, \dots, c_m ja poluille p_1, p_2, \dots, p_M *polkukustannukset* C_1, C_2, \dots, C_M , joiden perusteella liikenteen tasapainottaminen suoritetaan.

Asetetaan verkon linkkivirtausvektorista riippuva *linkkikustannusfunktio* $c: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$

$$c(f) = (c_1(f), c_2(f), \dots, c_m(f))^T.$$

Tässä $c_i(f) = c_i \in \mathbb{R}_+$ on linkin a_i linkkikustannus kullakin $i = 1, 2, \dots, m$, ja linkkikustannusfunktion arvo $c(f) \in \mathbb{R}_+^m$ on *linkkikustannusvektori*. Linkkikustannusten $c_i = c_i(f)$ ja vastaavuusehdon (3.1) avulla asetetaan polkukustannus

$$C_j = C_j(x) = \sum_{i=1}^m \delta_{ij} c_i(f) \quad (3.2)$$

kullekin polulle p_j , $j = 1, 2, \dots, M$. Polkukustannus määritellään siis polun muodostavien linkkien linkkikustannusten summana. Saadaan polkuvirtausvektorista riippuva *polkukustannusfunktio* $C: \mathbb{R}_+^M \rightarrow \mathbb{R}_+^M$

$$\begin{aligned} C(x) &= (C_1(x), C_2(x), \dots, C_M(x))^T \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \delta_{i1} c_i(f), \sum_{i=1}^m \delta_{i2} c_i(f), \dots, \sum_{i=1}^m \delta_{iM} c_i(f) \right)^T. \end{aligned}$$

Polkukustannusfunktion arvoa $C(f) \in \mathbb{R}_+^M$ sanotaan *polkukustannusvektori*ksi.

Määritellään *linkin* a_i *kustannus* linkkivirtauksen f_i ja linkkikustannuksen c_i tulona. Vastaavasti *polun* p_j *kustannus* määritellään polkuvirtauksen x_j ja polkukustannuksen C_j tulona. Verkon *kokonaiskustannus* on verkon polkujen kustannusten summa

$$\sum_{j=1}^M x_j C_j = \sum_{j=1}^M x_j C_j(x) = x^T C(x) = \langle C(x), x \rangle.$$

Jatkossa puhuttaessa *reitin hinnasta* (esim. halvin reitti) tarkoitetaan polkukustannusta (3.2), eikä edellä määritelyä polun kustannusta.

Oletetaan, että kullakin OD-parilla $w_1, w_2, \dots, w_J \in W$ on tietty liikennevirta $d_{w_1}, d_{w_2}, \dots, d_{w_J} \in \mathbb{R}_+$. Merkitsemällä OD-parin w_i välisten polkujen joukkoa P_{w_i} saadaan polkuvirtausehto

$$\sum_{x_j \in P_{w_i}} x_j = d_{w_i} \quad \text{kaikilla } i = 1, 2, \dots, J. \quad (3.3)$$

Määritellään *polkuvirtausten käypä joukko* K asettamalla

$$K = \{ x \in \mathbb{R}_+^M \mid \text{polkuvirtausehto (3.3) on voimassa} \}.$$

Vastaavasti määritellään *linkkivirtausten käypä joukko* D asettamalla

$$D = \{ f \in \mathbb{R}_+^m \mid \text{ehdot (3.1) ja (3.3) ovat voimassa} \}.$$

Esitetyt merkinnät on koottu Taulukkoon 3.1 (s. 41).

Liikenneverkon tasapainotuksen perustana ovat yli puoli vuosisataa sitten esitetyt *Wardropin tasapainoehdot*. Wardrop [16] esitti tasapainoehdot kahden periaatteen muodossa:

Wardropin ensimmäinen periaate. Käytössä olevien reittien matkustusajat ovat yhtäsuuret ja lisäksi pienemmät kuin käyttämättömillä reiteillä olisi.

Wardropin toinen periaate. Keskimääräinen matkustusaika on minimaalinen.

Ensimmäisen periaatteen mukaista liikenneverkkoa sanotaan *käyttäjäoptimoiduksi* ja toisen periaatteen mukaista liikenneverkkoa *järjestelmäoptimoiduksi*. Käyttäjäoptimoitu verkko saadaan, kun kukin verkon käyttäjä valitsee käytettäväkseen nopeimman mahdollisen reitin. Järjestelmäoptimoidussa verkossa koko verkkoa hallitseva ”tarkkailija” minimoi verkon kaikkien käyttäjien yhteenlasketun matka-ajan.

Tässä käsitellään ensimmäisen periaatteen mukaista käyttäjäoptimoitua tilannetta. Tällöin tarkasteltavaa teoriaa voidaan soveltaa myös rakenteettomiin tietoliikenneverkkoihin, joissa verkon yläpuolinen tarkkailija puuttuu. Rakenteettomassa verkossa reitinvalinnan suorittaa kukin lähettävä solmu.

n	$\in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\#N$, verkon solmujen lukumäärä
m	$\in \mathbb{N}$	$\#L$, verkon linkkien lukumäärä
W	$\subseteq N \times N$	verkon OD-parien joukko
J	$\in \mathbb{N}$	$\#W$, verkon OD-parien lukumäärä
P_w		OD-parin w välisten polkujen joukko
P		$\cup P_w$, kaikkien OD-parien välisten polkujen joukko
M	$\in \mathbb{N}$	$\#P$, käytettävissä olevien polkujen lukumäärä
a_i	$\in L$	verkon linkki ($i = 1, 2, \dots, m$)
p_j	$\in P$	OD-parin välinen polku ($j = 1, 2, \dots, M$)
δ_{ij}	$\in \{0, 1\}$	linkki-polku -indikaattori
f_i	$\in \mathbb{R}_+$	liikennevirta linkissä a_i
f	$\in \mathbb{R}_+^m$	linkkivirtausvektori
x_j	$\in \mathbb{R}_+$	liikennevirta polulla p_j
x	$\in \mathbb{R}_+^M$	polkuvirtausvektori
c_i	$\in \mathbb{R}_+$	linkin a_i linkkikustannus
C_j	$\in \mathbb{R}_+$	polun p_j polkukustannus
d_w	$\in \mathbb{R}_+$	OD-parin w liikennevirta
c	$\mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$	linkkikustannusfunktio
C	$\mathbb{R}_+^M \rightarrow \mathbb{R}_+^M$	polkukustannusfunktio
K	$\subseteq \mathbb{R}_+^M$	polkuvirtausten käypä joukko
D	$\subseteq \mathbb{R}_+^m$	linkkivirtausten käypä joukko

Taulukko 3.1: Käytettävät merkinnät.

Muotoillaan Wardropin ensimmäinen periaate tietoliikenneverkkojen reitityksessä käytettävän monitavoiteoptimoinnin vaatimaan muotoon, jossa minimoitavina ovat matkustusaikojen sijaan monitavoiteoptimoinnin ”työkaluina” toimivat kustannusfunktio. Lisäksi yleistetään periaate useamman OD-parin verkoille:

Wardropin tasapainoehto. Kullakin OD-parilla käytössä olevien reitien polkukustannukset ovat yhtäsuuret ja lisäksi pienemmät kuin käyttämättömillä reiteillä olisi.

Määritelmä 3.3. Wardropin tasapainoehdon toteuttava polkuvirtausvektori $x^* \in K$ on *tasapainotila*. Tällöin voidaan sanoa myös:

Polkuvirtausvektori x^* on tasapainossa.

Verkon liikenne on tasapainossa polkuvirtausvektorilla x^* .

Tasapainotilan määritelmälle on johdettavissa monia yhtäpitäviä muotoja. Esitetään seuraavaksi joitakin vaihtoehtoisia tasapainoehtoja [11, 15].

Tasapainoehto 1. Polkuvirtausvektori $x^* \in K$ on tasapainotila, jos jokaisella OD-parilla on käytössä vain halvimmat reitit.

Tasapainoehto 2. Polkuvirtausvektori $x^* \in K$ on tasapainotila, jos jokaisen OD-parin $w \in W$ kaikilla poluilla $p_r, p_s \in P_w$ ehdosta $C_r(x^*) > C_s(x^*)$ seuraa $x_r^* = 0$.

Tasapainoehto 3. Polkuvirtausvektori $x^* \in K$ on tasapainotila, jos jokaisen OD-parin $w \in W$ kaikilla poluilla $p_j \in P_w$ on voimassa polkukustannusten $C_j = C_j(x^*)$ minimaalisuusehto

$$\begin{cases} C_j = \lambda_w, & \text{jos } x_j^* > 0 \\ C_j \geq \lambda_w, & \text{jos } x_j^* = 0 \end{cases}, \quad (3.4)$$

missä $\lambda_w \in \mathbb{R}_+$ on OD-parin w tasapainotettu polkukustannus.

Seuraavat lauseet antavat vielä kaksi vaihtoehtoista muotoa verkon tasapainotilan määritelmälle.

Lause 3.1. *Polkuvirtausvektori $x^* \in K$ on tasapainotila, jos ja vain jos*

$$\langle C(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } x \in K.$$

Todistus. [15] Jos $x^* \in K$ on tasapainossa, on tällöin vain halvimmat reitit käytössä. Polkukustannusvektorilla $C(x^*)$ ei näin ollen voi saavuttaa pienempää kokonaiskustannusta millään käyvän polkuvirtausvektorin $x \in K$ valinnalla, eli

$$\langle C(x^*), x \rangle \geq \langle C(x^*), x^* \rangle \quad \text{aina, kun } x \in K.$$

Tämä on yhtäpitävää variaatioepäyhtälön

$$\langle C(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{aina, kun } x \in K$$

kanssa.

Oletetaan nyt, että variaatioepäyhtälö

$$\langle C(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \text{ aina, kun } x \in K \quad (3.5)$$

on voimassa, $x^* \in K$ ja x^* ei ole tasapainossa. Tällöin on olemassa sellainen OD-pari $w \in W$ ja sellaiset polut $p_r, p_s \in P_w$, että $x_r^* > 0$ ja $C_r(x^*) > C_s(x^*)$. Olkoon $y \in K$ polkuvirtausvektori, johon päädytään, kun x_r^* siirretään reitiltä p_r halvemmalle reitille p_s . Kokonaiskustannus pienenee $x_r^* C_r(x^*) - x_r^* C_s(x^*) > 0$ yksikköä, jolloin

$$\langle C(x^*), y \rangle < \langle C(x^*), x^* \rangle,$$

eli

$$\langle C(x^*), y - x^* \rangle < 0,$$

mikä on ristiriidassa oletuksen (3.5) kanssa. \square

Lause 3.2. *Olkoon f^* polkuvirtausvektoria $x^* \in K$ vastaava linkkivirtausvektori. Polkuvirtausvektori x^* on tasapainossa, jos ja vain jos*

$$\langle c(f^*), f - f^* \rangle \geq 0 \text{ aina, kun } f \in D.$$

Todistus. [15] Olkoon x linkkivirtausvektoria $f \in D$ vastaava polkuvirtausvektori. Vastaavuusehtojen (3.2) ja (3.1) avulla saadaan

$$\begin{aligned} \langle C(x^*), x \rangle &= x^T C(x^*) = \sum_{j=1}^M x_j C_j(x^*) \\ &= \sum_{j=1}^M \left(\sum_{i=1}^m \delta_{ij} c_i(f^*) \right) x_j \\ &= \sum_{i=1}^m c_i(f^*) \left(\sum_{j=1}^M \delta_{ij} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i(f^*) f_i = f^T c(f^*) \\ &= \langle c(f^*), f \rangle. \end{aligned}$$

Väite seuraa Lauseesta 3.1. \square

Lauseet 3.1 ja 3.2 muodostavat yhteyden tutkielman ensimmäisten lukujen ja Luvun 3 välille:

Seuraus 3.3. Verkon tasapainotila saadaan variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisuna, kun variaatioepäyhtälöongelman käypä joukko on polkuvirtausten käypä joukko

$$K = \{ x \in \mathbb{R}_+^M \mid \text{polkuvirtausehto (3.3) on voimassa} \},$$

ja kohdefunktio on polkukustannusfunktio $C : K \rightarrow \mathbb{R}_+^M$.

Seuraus 3.4. Verkon tasapainotilaa vastaava linkkivirtausvektori saadaan variaatioepäyhtälön (1.1) ratkaisuna, kun variaatioepäyhtälön käypä joukko on linkkivirtausten käypä joukko

$$D = \{ f \in \mathbb{R}_+^m \mid \text{ehdot (3.1) ja (3.3) ovat voimassa} \},$$

ja kohdefunktio on linkkikustannusfunktio $c : D \rightarrow \mathbb{R}_+^m$.

Huomautus 3.1. Polkuvirtausten käypä joukko on kompakti [11], joten Lauseen 1.6 nojalla tasapainotila on olemassa.

Seuraavaksi esitellään joitakin liikenneverkoille kehitettyjä tasapainomalleja (ks. [11, 12]).

Yksinkertaisimmassa tapauksessa kunkin linkin a_i linkkikustannus c_i riippuu ainoastaan liikennevirrasta f_i . Tätä yksinkertaisinta mallia kutsutaan *standardimalliksi*. Standardimallissa siis linkkikustannusfunktio $c : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ on muotoa

$$c(f) = (c_1(f_1), c_2(f_2), \dots, c_m(f_m))^T.$$

Laajennetussa mallissa linkin a_i linkkikustannus c_i voi riippua, paitsi omasta, myös muiden linkkien liikennevirrasta. *Monimuotoisessa* liikenteen tasapainomallissa liikenne koostuu luokitelluista ryhmistä. Jokaisella kuljetusmuodolla on oma kustannusfunktionsa, ja jokainen kuljetusmuoto vaikuttaa omalta osaltaan kaikkien kuljetusmuotojen kustannusfunktioihin.

Tarkasteltaessa tilannetta pakettiradioverkon kannalta voitaisiin tyytyä yksimuotoiseen malliin tai tarvittaessa kehittää kaksimuotoinen malli, jossa kontrolliliikenteen ja asiakasliikenteen paketeille annetaan omat kustannusfunktionsa.

Tietoliikenneverkon tasapainomallissa OD-parin w välisen liikenteen määrää voidaan kuvata yksiköllä *pakettia/sekunti*. Tavanomaisessa tietoliikenneverkossa voidaan toimia Wardropin toisen periaatteen mukaisesti. Tällöin tavoitteena on minimoida datapakettien keskimääräinen viive. Linkkikustannusfunktio c voidaan määrittellä asettamalla ([12] s. 58) kullekin linkille $a_i \in L$ linkkikustannus

$$c_i(f_i) = \frac{f_i}{k_i - f_i} + g_i f_i,$$

missä f_i on linkkiin a_i tulevien pakettien määrä (arrival rate), k_i linkin a_i kapasiteetti ja g_i linkin a_i läpäisyviive.

Tasapainotila ja ad hoc -radioverkko

Tietoliikenneverkoilla yleisesti liikenteen tasapainottaminen tasapainottaa myös verkon solmujen virrankulutusta. Mobiileista solmuista koostuvassa ad hoc -verkossa tämä merkitsisi verkon eliniän pidentymistä siinä mielessä, että kestää kauemmin ennen kuin ensimmäisestä solmusta loppuu virta. Tämä olisi hyvä asia sovelluksissa, joissa verkon jokaisen solmun toimintakyvyn säilyttäminen on tärkeää. Kyse on verkon absoluuttisen virrankulutuksen kasvattamisesta suhteellisen virrankulutuksen pienentämiseksi. Tiettyihin sovelluksiin, joissa tärkeää on säilyttää mahdollisimman pitkään muutaman solmun toimintakyky, tämä menettely ei sovi. Käytettävästä reititysprotokollasta riippuen verkon liikenteen tasapainottamisella voitaisiin yleisten hyötyjen lisäksi saavuttaa esimerkiksi suurempi datapakettien vastaanotto prosentti tai pienempi kontrolliliikenteen määrä.

Ennen kuin ad hoc -radioverkon liikennettä voidaan optimoida tässä tutkielmassa esitetyillä menetelmillä, on löydettävä vastaukset ainakin seuraaviin kysymyksiin:

- Miten muotoillaan kustannusfunktiot?
- Mikä reititysprotokolla on sopiva?
- Miten tasapainotuksen vaatima data kerätään?

Kustannusfunktioiden muotoilu on tärkeä osa tasapainotusalgoritmia, sillä reitityksen optimointikriteerit esitetään menetelmässä kustannusfunktioiden

avulla. Kustannusfunktioissa huomioon otettavia seikkoja ovat kaksimuotoinen liikenne (kontrolli- ja asiakasliikenne), reitin pituus, linkin stabiilisuus, linkin liikennemäärä sekä viereisten linkkien liikennemäärät. Tasapainotuksessa tulisi siis soveltaa laajennettua mallia, jossa linkkikustannuksissa huomioitaisiin esimerkiksi linkin alkusolmun lähettämien pakettien kokonaismäärä.

Liikenteen tasapainottamisen perusidea ja tasapainottamisella tavoiteltavat edut sopivat intuitiivisesti luontevammin hidasliikkeisiin verkkoihin, joihin siis proaktiiviset reititysprotokollat sopivat reaktiivisia paremmin. Proaktiivisia protokollia puoltavat myös niiden paremmat valmiudet tasapainotuksessa käyttökelpoisen reititysdatan keräämiseen. Sopivan protokollan valintaa kuten myös tasapainotuksella saatavia etuja on kuitenkin syytä tutkia simulaattoritasolla ennen kuin esimerkiksi reaktiiviset reititysprotokollat suljetaan kokonaan pois laskuista.

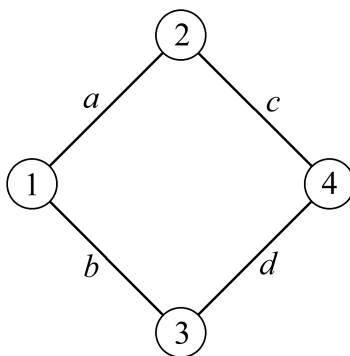
Tasapainottamisen soveltamista ad hoc -verkkoon silmällä pitäen lie-nee syytä tulevaisuudessa kiinnittää huomiota niin sanottuun *stokastiseen tasapainotukseen*, jossa kustannusfunktioihin lisätään satunnainen termi. Stokastisen liikenteenohjauksen suurin etu verrattuna deterministiseen on se, että verkkoa koskevat oletukset eivät ole niin rajoittavia. Solmuilla ei tarvitse olla täydellisiä tietoja verkon liikenteestä, eikä myöskään yhdenmukaisia käsityksiä matkakustannuksista [3]. Käytännössä stokastinen tasapainotus voi olla paras tapa hyödyntää tässä tutkielmassa tarkasteltavia menetelmiä mobiilien rakenteettomien tietoliikenneverkkojen tapauksessa.

Kappaleessa 3.4 esitetään algoritmi verkon tasapainotukseen. Tyypillisesti verkon liikenteen tasapainottava algoritmi etenee OD-parista toiseen kunnes koko verkon liikenne (ts. kaikki OD-parit) on käyty läpi ja tasapainotettu. Sovitettaessa tasapainotusmenetelmää rakenteettomaan ad hoc -verkkoon on siirryttävä vaiheittaisesta tasapainotuksesta hajautettuun tasapainotukseen. Ad hoc -verkossa kunkin OD-parin lähdesolmu suorittaisi kyseisen OD-parin liikenteen tasapainotuksen.

3.3 Tasapainoesimerkkejä

Tässä kappaleessa esitetään joitakin verkon tasapainotilaa käsitteleviä ja havainnollistavia esimerkkejä.

Esimerkki 3 (Braessin paradoksi). ([11] s. 164) Tarkastellaan Kuvan 3.2 verkkoa G .



Kuva 3.2: Verkko $G = (V, E)$.

Verkon G solmut ovat

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

ja linkit

$$E = \{a, b, c, d\}.$$

Oletetaan, että verkossa on yksi OD-pari $w_1 = (1, 4)$, ja sen liikenne $d_{w_1} = 6$. Tällöin käytettävien polkujen joukko on $P = P_{w_1} = \{(a, c), (b, d)\}$. Merkitään polkuja $p_1 = (a, c)$ ja $p_2 = (b, d)$. Olkoot verkon linkkikustannukset

$$\begin{aligned} c_a(f) &= c_a(f_a, f_b, f_c, f_d) = 10f_a \\ c_b(f) &= c_b(f_a, f_b, f_c, f_d) = f_b + 50 \\ c_c(f) &= c_c(f_a, f_b, f_c, f_d) = f_c + 50 \\ c_d(f) &= c_d(f_a, f_b, f_c, f_d) = 10f_d. \end{aligned}$$

Verkon liikenne on tasapainossa polkuvirtausvektorilla

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix};$$

tällöin linkkivirtausvektori on

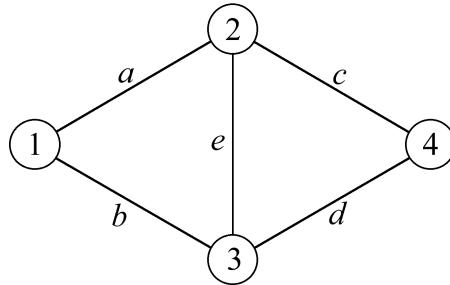
$$f^* = \begin{bmatrix} f_a^* \\ f_b^* \\ f_c^* \\ f_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ja polkukustannusvektori

$$\begin{aligned} C(x^*) &= \begin{bmatrix} C_1(x^*) \\ C_2(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a(f^*) + c_c(f^*) \\ c_b(f^*) + c_d(f^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10f_a^* + f_c^* + 50 \\ f_b^* + 50 + 10f_d^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \cdot 3 + 3 + 50 \\ 3 + 50 + 10 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83 \\ 83 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että verkon G solmut liikkuvat Kuvan 3.3 mukaisesti muodostaen linkin e , jonka linkkikustannus on

$$c_e(f) = c_e(f_a, f_b, f_c, f_d, f_e) = f_e + 10.$$



Kuva 3.3: Uusi linkki e .

Tällöin OD-parille $w_1 = (1, 4)$ muodostuu kaksi uutta polkua; $p_3 = (a, e, d)$ ja $p_4 = (b, e, c)$, jolloin $P = P_{w_1} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Polkuvirtausvektori

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ei enää ole tasapainossa, sillä linkkivirtausvektorilla

$$f = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \\ f_d \\ f_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

polun p_3 kustannus on

$$\begin{aligned} C_3(x) &= c_a(f) + c_e(f) + c_d(f) = 10f_a + f_e + 10 + 10f_d \\ &= 30 + 0 + 10 + 30 = 70 < 83. \end{aligned}$$

Nyt tasapaino saavutetaan polkuvirtausvektorilla

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

tällöin linkkivirtausvektori on

$$f^* = \begin{bmatrix} f_a^* \\ f_b^* \\ f_c^* \\ f_d^* \\ f_e^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ja polkukustannusvektori

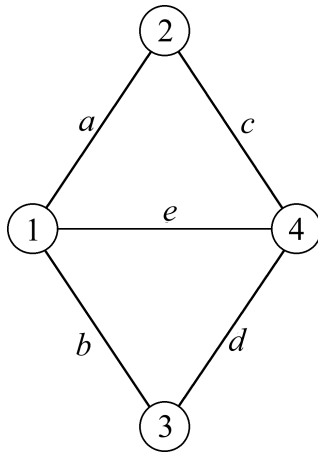
$$\begin{aligned} C(x^*) &= \begin{bmatrix} C_1(x^*) \\ C_2(x^*) \\ C_3(x^*) \\ C_4(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a(f^*) + c_c(f^*) \\ c_b(f^*) + c_d(f^*) \\ c_a(f^*) + c_e(f^*) + c_d(f^*) \\ c_b(f^*) + c_e(f^*) + c_c(f^*) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10f_a^* + f_c^* + 50 \\ f_b^* + 50 + 10f_d^* \\ 10f_a^* + f_e^* + 10 + 10f_d^* \\ f_b^* + 50 + f_e^* + 10 + f_c^* + 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cdot 4 + 2 + 50 \\ 2 + 50 + 10 \cdot 4 \\ 10 \cdot 4 + 2 + 10 + 10 \cdot 4 \\ 2 + 50 + 2 + 10 + 2 + 50 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 92 \\ 92 \\ 92 \\ 116 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin päädyttiin (esimerkin nimen mukaisesti) paradoksaaliseen tilanteeseen: Uuden linkin tuomat uudet reitit kasvattavat polkukustannuksia! Yksittäisen reitin kustannus kyllä pienenee ($3 \cdot 83 = 249 \rightarrow 2 \cdot 92 = 184$), mutta verkon kokonaiskustannus $\langle C(x^*), x^* \rangle$ kasvaa

$$\begin{aligned} [2 \ 2 \ 2 \ 0] \begin{bmatrix} 92 \\ 92 \\ 92 \\ 116 \end{bmatrix} - [3 \ 3] \begin{bmatrix} 83 \\ 83 \end{bmatrix} &= 552 - 495 \\ &= 57 \end{aligned}$$

yksikköä. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että uusilla poluilla on samoja linkkejä alkuperäisten polkujen kanssa. Voidaan osoittaa, että uusi polku $p \in P_w$, jolla ei ole yhteisiä linkkejä muiden polkujen $p_i \in P_w$ kanssa, ei koskaan kasvata OD-parin w välisen liikenteen siirtokustannuksia Braessin paradoksin mukaisesti.

Tarkastellaan vielä tämän esimerkin puitteissa tilannetta, jossa verkon G solmut liikkuvat Kuvan 3.4 mukaisesti muodostaen linkin e tällä kertaa solmujen 1 ja 4 välille.



Kuva 3.4: Uusi linkki $e = (1, 4)$.

Olkoon linkin e linkkikustannus jälleen $c_e(f) = f_e + 10$. Nyt polkujen joukko on $P = P_{w_1} = \{p_1, p_2, p_3\} = \{(a, c), (b, d), e\}$. Verkko tasapainottuu polkuvirtausvektorilla

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix};$$

tällöin linkkivirtausvektori on

$$f^* = \begin{bmatrix} f_a^* \\ f_b^* \\ f_c^* \\ f_d^* \\ f_e^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ja polkukustannusvektori

$$\begin{aligned} C(x^*) &= \begin{bmatrix} C_1(x^*) \\ C_2(x^*) \\ C_3(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a(f^*) + c_c(f^*) \\ c_b(f^*) + c_d(f^*) \\ c_e(f^*) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10f_a^* + f_c^* + 50 \\ f_b^* + 50 + 10f_d^* \\ f_e^* + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cdot 0 + 0 + 50 \\ 0 + 50 + 10 \cdot 0 \\ 6 + 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

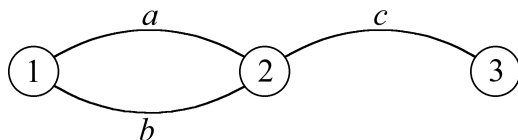
Verkon liikenteen kokonaiskustannus on

$$\langle C(x^*), x^* \rangle = [0 \ 0 \ 6] \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 16 \end{bmatrix} = 96.$$

Kustannukset siis pienenevät, koska uudella polulla ei ole yhteisiä linkkejä muiden polkujen kanssa.

Esimerkki 4. Määritelmä 3.1 antaa niin sanotut *yksinkertaiset* verkot, joissa linkin alku- ja loppusolmu määräävät linkin yksikäsitteisesti. Tarkastellaan tässä esimerkissä verkkoja, joissa solmuparin välillä voi olla useampi kuin yksi linkki. Tällaisten verkkojen tasapainottaminen voi olla työlästä, sillä verkossa saattaa kullakin solmuparilla olla käytettäviä polkuja enemmän kuin verkossa on linkkejä.

Tarkastellaan Kuvan 3.5 (s. 52) verkkoa. Oletetaan, että verkossa on yksi OD-pari $w_1 = (1, 3)$, ja sen liikenne on $d_{w_1} = 10$. Tällöin käytettävien polkujen joukko on $P = P_{w_1} = \{(a, c), (b, c)\}$. Merkitään polkuja $p_1 = (a, c)$ ja



Kuva 3.5: Kaksinkertainen linkki.

$p_2 = (b, c)$. Olkoot verkon linkkikustannukset

$$\begin{aligned} c_a(f) &= c_a(f_a, f_b, f_c) = f_a + 5 \\ c_b(f) &= c_b(f_a, f_b, f_c) = 2f_b + 10 \\ c_c(f) &= c_c(f_a, f_b, f_c) = f_c + 10. \end{aligned}$$

Verkon liikenne on tasapainossa polkuvirtausvektorilla

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix};$$

tällöin linkkivirtausvektori on

$$f^* = \begin{bmatrix} f_a^* \\ f_b^* \\ f_c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 10 \end{bmatrix}$$

ja polkukustannusvektori

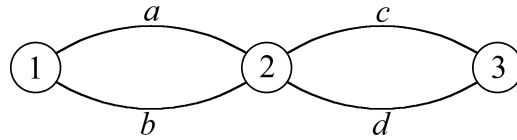
$$\begin{aligned} C(x^*) &= \begin{bmatrix} C_1(x^*) \\ C_2(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a(f^*) + c_c(f^*) \\ c_b(f^*) + c_c(f^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^* + 5 + f_c^* + 10 \\ 2f_b^* + 10 + f_c^* + 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{25}{3} + 5 + 10 + 10 \\ 2 \cdot \frac{5}{3} + 10 + 10 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33\frac{1}{3} \\ 33\frac{1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lisätään verkkoon Kuvan 3.6 (s. 53) mukaisesti linkki d , jonka linkkikustannus on

$$c_d(f) = c_d(f_a, f_b, f_c, f_d) = f_d + 5.$$

Verkon ainoalle OD-parille $w_1 = (1, 3)$ muodostuu kaksi uutta polkua; $p_3 = (a, d)$ ja $p_4 = (b, d)$. Nyt polkujen joukko on

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{(a, c), (b, c), (a, d), (b, d)\}.$$



Kuva 3.6: Uusi linkki d .

Edellä saatu polkuvirtausvektori ei ole tasapainossa, sillä käyttämättä olevilla poluilla p_3 ja p_4 polkukustannukset ovat vain $18\frac{1}{3}$. Polkukustannukset saadaan yhtäsuuriksi linkkivirtausvektorilla

$$f^* = \begin{bmatrix} f_a^* \\ f_b^* \\ f_c^* \\ f_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{15}{2} \end{bmatrix};$$

tällöin polkukustannusvektori on

$$\begin{aligned} C(x^*) &= \begin{bmatrix} C_1(x^*) \\ C_2(x^*) \\ C_3(x^*) \\ C_4(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a(f^*) + c_c(f^*) \\ c_b(f^*) + c_c(f^*) \\ c_a(f^*) + c_d(f^*) \\ c_b(f^*) + c_d(f^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^* + 5 + f_c^* + 10 \\ 2f_b^* + 10 + f_c^* + 10 \\ f_a^* + 5 + f_d^* + 5 \\ 2f_b^* + 10 + f_d^* + 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{25}{3} + 5 + \frac{5}{2} + 10 \\ 2 \cdot \frac{5}{3} + 10 + \frac{5}{2} + 10 \\ \frac{25}{3} + 5 + \frac{15}{2} + 5 \\ \frac{5}{3} + 10 + \frac{15}{2} + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\frac{5}{6} \\ 25\frac{5}{6} \\ 25\frac{5}{6} \\ 25\frac{5}{6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Linkkivirtausvektoria f^* vastaava polkuvirtausvektori x^* ei ole yksikäsitteinen, sillä linkkivirtaukseen f^* - ja tasapainoon - päästään esimerkiksi polkuvirtauksilla

$$x^1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{10}{6} \\ \frac{45}{6} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} \frac{15}{6} \\ 0 \\ \frac{35}{6} \\ \frac{10}{6} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad x^3 = \begin{bmatrix} \frac{10}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{40}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Koko ratkaisujoukko saadaan esimerkiksi muotoon

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{5}{6} \leq x_1 \leq \frac{15}{6}, x_2 = \frac{15}{6} - x_1, x_3 = \frac{50}{6} - x_1, x_4 = x_1 - \frac{5}{6} \right\}.$$

Tällaisessa tilanteessa, jossa ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, saavutettava tasapainotila riippuu ratkaisumenetelmästä ja sen parametreista.

Edellä esitetyissä esimerkeissä käsiteltiin yhden OD-parin verkkoja. Monimutkaisempia verkkoja käsitellään seuraavissa kappaleissa. Laskutoimitusten määrän kasvaessa (kappaleessa 3.5) turvaututaan tietokoneavusteiseen laskentaan.

3.4 Menetelmä verkon tasapainotukseen

Tässä kappaleessa keskitytään verkon tasapainon numeeriseen ratkaisemiseen standardimallin mukaisten lineaaristen linkkikustannusten tapauksessa.

Tarkastellaan edelleen verkkoa $G = (N, L)$. Kappaleen 3.2 merkinnät ovat voimassa.

Olkoon kunkin linkin $a_i \in L$ linkkikustannus

$$c_i(f_i) = g_i f_i + h_i,$$

missä $g_i, h_i > 0$.

Esitetään ([11] s. 78) menetelmä OD-parin w liikenteen tasapainottamiseen.

Yhden OD-parin tasapainotus.

Askel 0 (alustus): Valitaan käypä polkuvirtaus $x^0 \in K$ ja lopetuskriteeri $\varepsilon > 0$. Asetetaan $k := 1$.

Askel 1 (valinta): Määritä indeksijoukot

$$R = \{ j \mid \max_{p_j \in P_w} C_j : x_j^{k-1} > 0 \}$$

$$Q = \{ j \mid \min_{p_j \in P_w} C_j \}$$

ja valitse niistä indeksit $r \in R$ ja $q \in Q$. Jos $|C_r - C_q| \leq \varepsilon$, lopeta.

Askel 2 (laskenta): Laske

$$\Delta' = \frac{C_r - C_q}{\sum_{i=1}^m g_i (\delta_{ir} - \delta_{iq})^2},$$

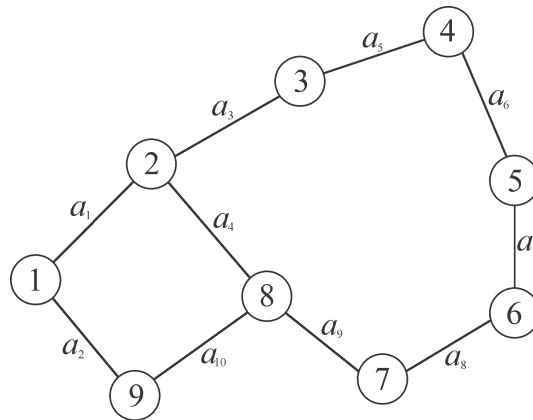
$$\Delta = \min\{\Delta', x_r^{k-1}\}.$$

Aseta

$$x_i^k = \begin{cases} x_i^{k-1} - \Delta, & i = r \\ x_i^{k-1} + \Delta, & i = q \\ x_i^{k-1} & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja $k := k + 1$. Siirry askeleeseen 1.

Esimerkki 5.



Kuva 3.7: Verkko $G = (N, L)$.

Tarkastellaan Kuvan 3.7 (Johdannossa esitettyä) verkkoa $G = (N, L)$, missä

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ja

$$L = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\};$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= (1, 2) & a_2 &= (1, 9) & a_3 &= (2, 3) \\
a_4 &= (2, 8) & a_5 &= (3, 4) & a_6 &= (4, 5) \\
a_7 &= (5, 6) & a_8 &= (6, 7) & a_9 &= (7, 8) \\
a_{10} &= (8, 9)
\end{aligned}$$

Olkoot linkkikustannukset $c_i(f_i) = f_i + 1$ kaikilla $i = 1, \dots, 10$. Oletetaan, että verkossa G on OD-pari $w = (2, 6)$, jonka liikennevirta on $d_w = 2$. Tällöin

$$P_w = \{p_1, p_2, p_3\},$$

missä

$$\begin{aligned}
p_1 &= (2, 8, 7, 6) \\
p_2 &= (2, 3, 4, 5, 6) \\
p_3 &= (2, 1, 9, 8, 7, 6).
\end{aligned}$$

Suoritetaan yhden OD-parin tasapainotus. Olkoon alustava polkuvirtausvektori

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin polkukustannukset ovat

$$C_1 = c_4(f_4) + c_9(f_9) + c_8(f_8) = 3 \cdot (2 + 1) = 9$$

$$C_2 = c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) = 4 \cdot (0 + 1) = 4$$

$$C_3 = c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) + c_8(f_8) = 3 \cdot (0 + 1) + 2 \cdot (2 + 1) = 9.$$

Indeksit ovat $r = 1$ ja $q = 2$. Lasketaan

$$\begin{aligned}
\Delta' &= \frac{C_1 - C_2}{\sum_{i=1}^{10} (\delta_{i1} - \delta_{i2})^2} \\
&= \frac{9 - 4}{0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0} = \frac{5}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \min\{\Delta', x_1^0\} \\
&= \min\left\{\frac{5}{7}, 2\right\} = \frac{5}{7}.
\end{aligned}$$

Asetetaan

$$x^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 - \Delta \\ x_2^0 + \Delta \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{5}{7} \\ 0 + \frac{5}{7} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt polkukustannukset ovat

$$C_1 = c_4(f_4) + c_9(f_9) + c_8(f_8) = 3 \cdot \left(\frac{9}{7} + 1\right) = \frac{48}{7}$$

$$C_2 = c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) = 4 \cdot \left(\frac{5}{7} + 1\right) = \frac{48}{7}$$

$$C_3 = c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) + c_8(f_8) = 3 \cdot (0 + 1) + 2 \cdot \left(\frac{9}{7} + 1\right) = \frac{53}{7}.$$

Näin ollen x^1 on tasapainotila.

Tasapainotettaessa kaikki verkon OD-parit w_1, w_2, \dots, w_J käytetään edellistä menetelmää korjattuna siten, että askeleessa 1 suoritetaan valinta ja lopetusehdon tarkistus jokaisella OD-parilla. Vastaavasti askeleessa 2 laskenta suoritetaan erikseen jokaiselle OD-parille, ja uuteen polkuvirtausvektoriin x^k tehdään tarvittavat muutokset.

Menetelmä verkon tasapainotukseen.

Askel 0 (alustus): Valitaan käypä polkuvirtaus $x^0 \in K$ ja lopetuskriteeri $\varepsilon > 0$. Asetetaan $k := 1$.

Askel 1 (valinta): Määritä kullekin $l = 1, 2, \dots, J$ indeksijoukot

$$R_l = \{ j \mid \max_{p_j \in P_{w_l}} C_j : x_j^{k-1} > 0 \}$$

$$Q_l = \{ j \mid \min_{p_j \in P_{w_l}} C_j \}$$

ja valitse niistä indeksit $r_l \in R_l$ ja $q_l \in Q_l$. Jos $|C_{r_l} - C_{q_l}| \leq \varepsilon$ kaikilla $l = 1, 2, \dots, J$, lopeta.

Askel 2 (laskenta): Laske kaikille $l = 1, 2, \dots, J$, joille $|C_{r_l} - C_{q_l}| > \varepsilon$,

$$\Delta'_l = \frac{C_{r_l} - C_{q_l}}{\sum_{i=1}^m g_i (\delta_{ir_l} - \delta_{iq_l})^2},$$

$$\Delta_l = \min\{\Delta'_l, x_{r_l}^{k-1}\}.$$

Aseta ($l = 1, 2, \dots, J; |C_{r_l} - C_{q_l}| > \varepsilon$)

$$x_i^k = \begin{cases} x_i^{k-1} - \Delta_l, & i = r_l \\ x_i^{k-1} + \Delta_l, & i = q_l \\ x_i^{k-1} & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja $k := k + 1$. Siirry askeleeseen 1.

Esitetty menetelmä verkon tasapainottamiseen käyttää siis yhden OD-parin tasapainotukseen tarkoitettua optimaalista (ks. [11]) korjausta Δ . Useamman OD-parin tasapainotus on tästä huolimatta työlästä, sillä tehdessään korjauksia polkuvirtauksiin lähdesolmut eivät huomioi toisten lähdesolmujen samalla hetkellä tekemiä korjauksia. Näin ollen halvimmalle reitille voi ohjautua liikaa liikennettä, jolloin joudutaan tekemään korjauksia takaisin.

Esimerkki 6. Tarkastellaan Esimerkin 5 tapaan Kuvan 3.7 (s. 55) verkkoa. Olkoot linkkikustannukset edelleen $c_i(f_i) = f_i + 1$ kaikilla $i = 1, \dots, 10$. Oletetaan, että verkossa G on kaksi OD-paria

$$\begin{aligned}w_1 &= (1, 7) \\w_2 &= (2, 6),\end{aligned}$$

joiden liikennevirrat ovat $d_{w_1} = d_{w_2} = 2$. Käytettävissä olevien polkujen joukko on

$$P = P_{w_1} \cup P_{w_2} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\},$$

missä

$$\begin{aligned}p_1 &= (1, 2, 8, 7) \\p_2 &= (1, 9, 8, 7) \\p_3 &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \\p_4 &= (1, 9, 8, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \\p_5 &= (2, 8, 7, 6) \\p_6 &= (2, 3, 4, 5, 6) \\p_7 &= (2, 1, 9, 8, 7, 6).\end{aligned}$$

Tässä esimerkissä laskutoimitukset suoritetaan tarkoilla rationaaliarvoilla, mutta merkintöjen helpottamiseksi luvut esitetään desimaalimuodossa kolmen desimaalin tarkkuudella. Olkoon lopetuskriteeri $\varepsilon = 0,1$ ja alustava polkuvirtausvektori

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \\ x_5^0 \\ x_6^0 \\ x_7^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vastaava linkkivirtausvektori on

$$f = [2 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 4 \ 0]^T,$$

jolloin polkukustannukset ovat

$$C_1 = c_1(f_1) + c_4(f_4) + c_9(f_9) = 2 + 1 + 2 \cdot (4 + 1) = 13$$

$$C_2 = c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) = 2 \cdot (0 + 1) + 4 + 1 = 7$$

$$C_3 = c_1(f_1) + c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) + c_8(f_8) \\ = 2 + 1 + 4 \cdot (0 + 1) + 2 + 1 = 10$$

$$C_4 = c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_4(f_4) + c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) + c_8(f_8) \\ = 2 \cdot (0 + 1) + 4 + 1 + 5 \cdot (0 + 1) = 12$$

$$C_5 = c_4(f_4) + c_9(f_9) + c_8(f_8) = 2 \cdot (4 + 1) + 2 + 1 = 13$$

$$C_6 = c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) = 4 \cdot (0 + 1) = 4$$

$$C_7 = c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) + c_8(f_8) \\ = 2 + 1 + 2 \cdot (0 + 1) + 4 + 1 + 2 + 1 = 13.$$

OD-parin w_1 indeksit ovat $r_1 = 1$ ja $q_1 = 2$. OD-parin w_2 indeksit ovat $r_2 = 5$ ja $q_2 = 6$. Lasketaan

$$\Delta'_1 = \frac{C_1 - C_2}{\sum_{i=1}^{10} (\delta_{i1} - \delta_{i2})^2} \\ = \frac{13 - 7}{1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$\Delta'_2 = \frac{C_5 - C_6}{\sum_{i=1}^{10} (\delta_{i5} - \delta_{i6})^2} \\ = \frac{13 - 4}{0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0} = \frac{9}{7} = 1,286$$

$$\Delta_1 = \min\{\Delta'_1, x_1^0\} = 1,5$$

$$\Delta_2 = \min\{\Delta'_2, x_5^0\} = 1,286.$$

Asetetaan

$$x^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \\ x_5^1 \\ x_6^1 \\ x_7^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 - \Delta_1 \\ x_2^0 + \Delta_1 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \\ x_5^0 - \Delta_2 \\ x_6^0 + \Delta_2 \\ x_7^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0,714 \\ 1,286 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vastaava linkkivirtausvektori on

$$f = [0,5 \quad 1,5 \quad 1,286 \quad 1,214 \quad 1,286 \quad 1,286 \quad 1,286 \quad 0,714 \quad 2,714 \quad 1,5]^T.$$

Nyt polkukustannukset ovat

$$C_1 = c_1(f_1) + c_4(f_4) + c_9(f_9) = 3 + 0,5 + 1,214 + 2,714 = 7,429$$

$$C_2 = c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) = 3 + 2 \cdot 1,5 + 2,714 = 8,714$$

$$\begin{aligned} C_3 &= c_1(f_1) + c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) + c_8(f_8) \\ &= 6 + 0,5 + 4 \cdot 1,286 + 0,714 = 12,357 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_4(f_4) + c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) + c_8(f_8) \\ &= 8 + 2 \cdot 1,5 + 1,214 + 4 \cdot 1,286 + 0,714 = 18,071 \end{aligned}$$

$$C_5 = c_4(f_4) + c_9(f_9) + c_8(f_8) = 3 + 1,214 + 2,714 + 0,714 = 7,643$$

$$C_6 = c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) = 4 + 4 \cdot 1,286 = 9,143$$

$$\begin{aligned} C_7 &= c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) + c_8(f_8) \\ &= 5 + 0,5 + 2 \cdot 1,5 + 2,714 + 0,714 = 11,929. \end{aligned}$$

Indeksit ovat $r_1 = 2$, $q_1 = 1$, $r_2 = 6$ ja $q_2 = 5$. Lasketaan

$$\begin{aligned} \Delta'_1 &= \frac{C_2 - C_1}{\sum_{i=1}^{10} (\delta_{i2} - \delta_{i1})^2} \\ &= \frac{8,714 - 7,429}{1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1} = 0,321 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_2 &= \frac{C_6 - C_5}{\sum_{i=1}^{10} (\delta_{i6} - \delta_{i5})^2} \\ &= \frac{9,143 - 7,643}{0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0} = 0,214 \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \min\{\Delta'_1, x_2^1\} = 0,321$$

$$\Delta_2 = \min\{\Delta'_2, x_6^1\} = 0,214.$$

Asetetaan

$$x^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \\ x_6^2 \\ x_7^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 + \Delta_1 \\ x_2^1 - \Delta_1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \\ x_5^1 + \Delta_2 \\ x_6^1 - \Delta_2 \\ x_7^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,821 \\ 1,179 \\ 0 \\ 0 \\ 0,929 \\ 1,071 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vastaava linkkivirtausvektori on

$$f = [0,821 \quad 1,179 \quad 1,071 \quad 1,75 \quad 1,071 \quad 1,071 \quad 1,071 \quad 0,929 \quad 2,929 \quad 1,179]^T.$$

Nyt polkukustannukset ovat

$$C_1 = c_1(f_1) + c_4(f_4) + c_9(f_9) = 3 + 0,821 + 1,75 + 2,929 = 8,5$$

$$C_2 = c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) = 3 + 2 \cdot 1,179 + 2,929 = 8,286$$

$$\begin{aligned} C_3 &= c_1(f_1) + c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) + c_8(f_8) \\ &= 6 + 0,821 + 4 \cdot 1,071 + 0,929 = 12,036 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_4(f_4) + c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) + c_8(f_8) \\ &= 8 + 2 \cdot 1,179 + 1,75 + 4 \cdot 1,071 + 0,929 = 17,321 \end{aligned}$$

$$C_5 = c_4(f_4) + c_9(f_9) + c_8(f_8) = 3 + 1,75 + 2,929 + 0,929 = 8,607$$

$$C_6 = c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) = 4 + 4 \cdot 1,071 = 8,286$$

$$\begin{aligned} C_7 &= c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) + c_8(f_8) \\ &= 5 + 0,821 + 2 \cdot 1,179 + 2,929 + 0,929 = 12,036. \end{aligned}$$

Indeksit ovat $r_1 = 1$, $q_1 = 2$, $r_2 = 5$ ja $q_2 = 6$. Lasketaan

$$\begin{aligned} \Delta'_1 &= \frac{C_1 - C_2}{\sum_{i=1}^{10} (\delta_{i1} - \delta_{i2})^2} \\ &= \frac{8,5 - 8,286}{1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1} = 0,054 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_2 &= \frac{C_5 - C_6}{\sum_{i=1}^{10} (\delta_{i5} - \delta_{i6})^2} \\ &= \frac{8,607 - 8,286}{0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0} = 0,046 \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \min\{\Delta'_1, x_1^2\} = 0,054$$

$$\Delta_2 = \min\{\Delta'_2, x_5^2\} = 0,046.$$

Asetetaan

$$x^3 = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \\ x_4^3 \\ x_5^3 \\ x_6^3 \\ x_7^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + \Delta_1 \\ x_2^2 - \Delta_1 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 + \Delta_2 \\ x_6^2 - \Delta_2 \\ x_7^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,768 \\ 1,232 \\ 0 \\ 0 \\ 0,883 \\ 1,117 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vastaava linkkivirtausvektori on

$$f = [0,768 \quad 1,232 \quad 1,117 \quad 1,651 \quad 1,117 \quad 1,117 \quad 1,117 \quad 0,883 \quad 2,883 \quad 1,232]^T.$$

Nyt polkukustannukset ovat

$$C_1 = c_1(f_1) + c_4(f_4) + c_9(f_9) = 3 + 0,768 + 1,651 + 2,883 = 8,301$$

$$C_2 = c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) = 3 + 2 \cdot 1,232 + 2,883 = 8,347$$

$$\begin{aligned} C_3 &= c_1(f_1) + c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) + c_8(f_8) \\ &= 6 + 0,768 + 4 \cdot 1,117 + 0,883 = 12,120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_4(f_4) + c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) + c_8(f_8) \\ &= 8 + 2 \cdot 1,232 + 1,651 + 4 \cdot 1,117 + 0,883 = 17,467 \end{aligned}$$

$$C_5 = c_4(f_4) + c_9(f_9) + c_8(f_8) = 3 + 1,651 + 2,883 + 0,883 = 8,416$$

$$C_6 = c_3(f_3) + c_5(f_5) + c_6(f_6) + c_7(f_7) = 4 + 4 \cdot 1,117 = 8,469$$

$$\begin{aligned} C_7 &= c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_{10}(f_{10}) + c_9(f_9) + c_8(f_8) \\ &= 5 + 0,768 + 2 \cdot 1,232 + 2,883 + 0,883 = 11,997. \end{aligned}$$

Indeksit ovat $r_1 = 2$, $q_1 = 1$, $r_2 = 6$ ja $q_2 = 5$. Saadaan

$$C_2 - C_1 = 8,347 - 8,301 = 0,046 < 0,1 = \varepsilon$$

ja

$$C_6 - C_5 = 8,469 - 8,416 = 0,054 < 0,1 = \varepsilon,$$

eli lopetusehdot täyttyvät. Iteraatti x^3 approksimoi tasapainotilaa menetelmälle asetetulla tarkkuudella 0,1.

Tässä kappaleessa esitettiin lineaaristen linkkikustannusten tapauksessa toimiva iteratiivinen tasapainotus algoritmi, joka käytti hyväkseen yhden OD-parin tasapainotuksen optimaalista korjausta. Yleisemmässä tapauksessa, missä linkkikustannukset eivät ole lineaariset, on käytettävä CR-menetelmien tapaisia yleisiä ratkaisualgoritmeja.

Luvussa 2 todettiin erilaisten CR-menetelmien runsaus. Sopivan CR-menetelmän valinta kulloinkin käsilläolevaan ongelmaan perustetaan menetelmän tehokkuuteen. Tietoliikennesovellutuksissa ei riitä, että algoritmi löytää ratkaisun – se on löydettävä nopeasti. On osoitettu [11], että pienemmissä ja yksinkertaisemmissä verkoissa ”yksinkertaisemmat” CR-tasapainotus algoritmit ovat tehokkaampia kuin ”monimutkaiset” (esim. gradienttimenetelmät, ks. Luku 2) CR-menetelmät; monimutkainen CR-menetelmä suorittaa tasapainotuksen vähemmän iteraatioin, mutta kunkin

iteraation laskentaan kuluva aika on paljon pidempi kuin yksinkertaisella menetelmällä. Suuremmissa ja monimutkaisemmissa verkko-ongelmissa tilanne kääntyy monimutkaisempien CR-menetelmien eduksi; tarvittavien iteraatioiden määrä kasvaa nopeammin yksinkertaisilla CR-menetelmillä, jolloin iteraatioihin kuluva yhteenlaskettu aika on yksinkertaisilla menetelmillä suurempi. Tämän havainnon mukaan ongelmanratkojan olisi syytä kehittää vaikkapa kaksi erilaista CR-menetelmää – yksinkertainen menetelmä yksinkertaisemmille ongelmille ja monimutkainen menetelmä monimutkaisemmille ongelmille.

3.5 Numeerisia kokeita

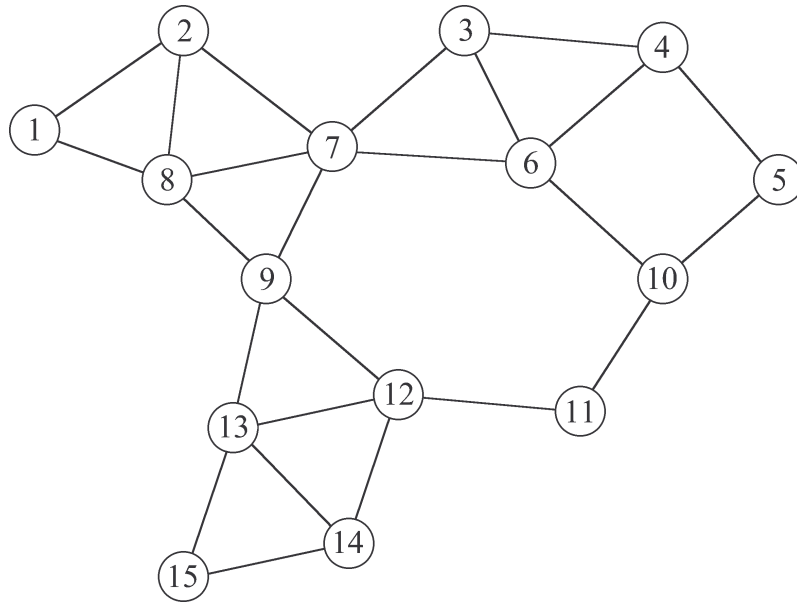
Tässä kappaleessa ratkaistaan yhdistettyjen verkkojen tasapainotustehtäviä käyttämällä Kazanin yliopistossa kehitettyä tietokoneohjelmaa. Ohjelma laskee tasapainotilan algoritmilla, joka perustuu kappaleessa 2.2 esitettyyn projektiomenetelmään. Algoritmiin kuuluu edellisen kappaleen menetelmän valintaproseduuri, jossa kullekin OD-parille etsitään halvin reitti ja kallein käytössä oleva reitti. Koska linkkikustannukset eivät välttämättä ole lineaarisia, käytetään uuden polkuvirtausvektorin laskentaan edellisen kappaleen menetelmän sijaan yleisempää projektiomenetelmää.

Tämän kappaleen verkkosovellutuksissa käsitellään määritelmän mukaan suuntaamattomia verkkoja, mutta solmujen i ja j välisiä linkkejä (i, j) ja (j, i) ei samaisteta kuten edellä. Langattoman tietoliikenneverkon radiolinkeissä etenevät vastakkaisuuntaiset radioaallot eivät vaikuta toisiinsa millään tavalla, joten on perusteltua tarkastella vastakkaisuuntaisia liikennemääriä erikseen.

Esimerkki 7. Tarkastellaan Kuvan 3.8 (s. 64) verkkoa G_1 .

Suoritetaan tasapainotus erikseen kolmella standardimallin mukaisella linkkikustannusfunktiolla. Kunkin linkin a_i linkkikustannus on ensimmäisessä tasapainotuksessa

$$c_i(f) = c_i(f_i) = 1 + f_i,$$



Kuva 3.8: Verkko G_1 .

toisessa tasapainotuksessa

$$c_i(f) = c_i(f_i) = 1 + f_i + f_i^2$$

ja kolmannessa tasapainotuksessa

$$c_i(f) = c_i(f_i) = 1 + f_i + f_i^2 + f_i^3.$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa verkon G_1 liikenne koostuu kolmen OD-parin välisestä liikenteestä. Olkoot verkon OD-parit $w_1 = (2, 10)$, $w_2 = (3, 15)$ ja $w_3 = (4, 8)$, ja olkoon kunkin solmuparin liikenne 2 pakettia sekunnissa.

OD-pari	pakettia/sekunti	lyhin polku
(2, 10)	2	2, 7, 6, 10
(3, 15)	2	3, 7, 9, 13, 15
(4, 8)	2	4, 3, 7, 8

Taulukko 3.2: Verkon G_1 liikenne.

Taulukossa 3.2 esitetään verkon G_1 tasapainotettava liikenne OD-parien mukaan ilmoitettuna. Lisäksi taulukossa ilmoitetaan iteratiivisen tasapainotus-

menetelmän alustuksessa käytettävä (lyhin) polku. Valitaan menetelmän lopetuskriteeriksi $\varepsilon = 0,001$. Näillä tiedoilla tasapainotusohjelma suorittaa tasapainotuksen päätyen Taulukossa 3.3 esitettyihin tuloksiin.

linkkikustannus	iteraatioita	reittejä käytössä
$1 + f_i$	28	10
$1 + f_i + f_i^2$	41	13
$1 + f_i + f_i^2 + f_i^3$	68	16

Taulukko 3.3: Verkon G_1 tasapainotuksen tulokset.

Tarkastellaan iteraation etenemistä linkkikustannusten

$$c_i(f) = c_i(f_i) = 1 + f_i + f_i^2 + f_i^3$$

tapauksessa. Tässä tasapainotetut polkukustannukset (3.4) asettuvat arvoihin

$$\lambda_{w_1} = 15,39$$

$$\lambda_{w_2} = 23,48$$

$$\lambda_{w_3} = 17,48.$$

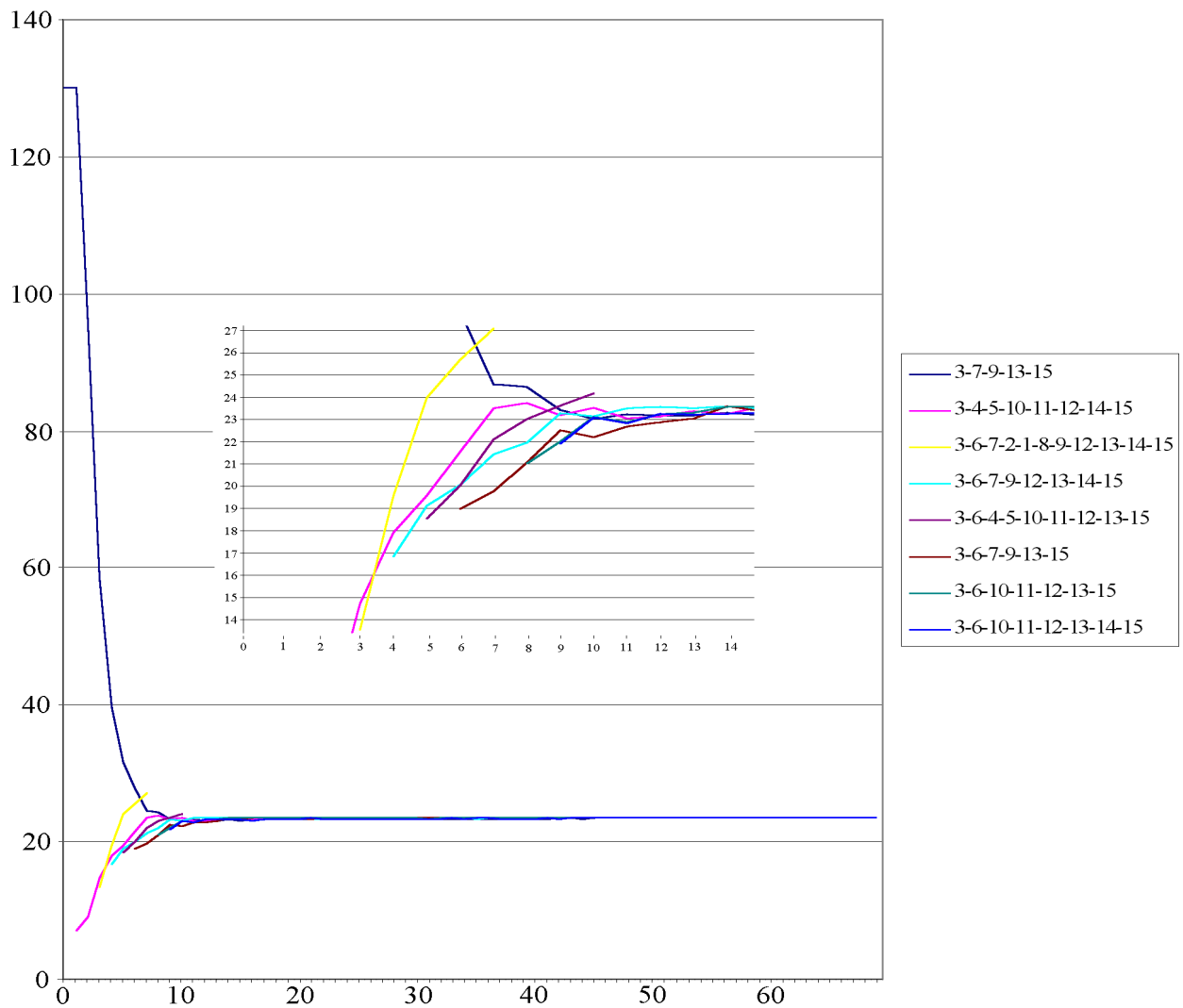
Kuvassa 3.9 (s. 66) on esitetty iteraation edetessä OD-parin $w_2 = (3, 15)$ käyttämien reittien kustannukset. Kuvaan on piirretty kullakin iteraatiokierroksella kustannukset reiteille, joilla liikennevirta on positiivinen. Kuvasta on helppo seurata, miten menetelmän edetessä halvin reitti otetaan käyttöön ja kalleimmista luovutaan.

Kuvasta 3.10 (s. 67) käy ilmi, miten OD-parin $w_2 = (3, 15)$ liikennevirta jakautuu eri reiteille kullakin iteraatiokierroksella.

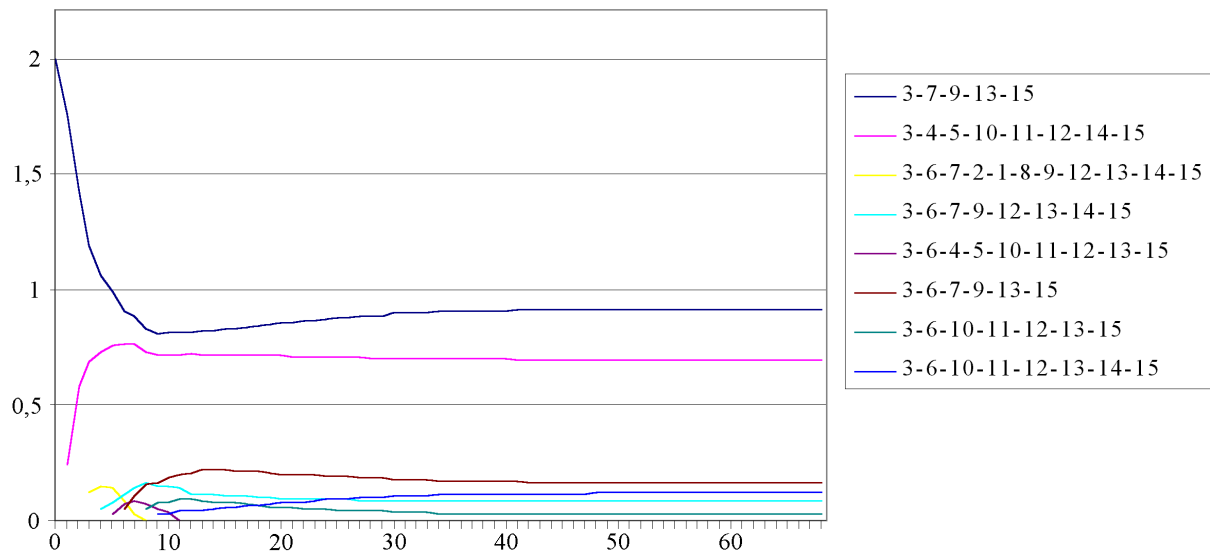
Linkkikustannuksilla $c_i(f) = c_i(f_i) = 1 + f_i + f_i^2 + f_i^3$ suoritettun tasapainotuksen jälkeen käytössä on 16 reittiä. Kyseiset reitit ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(2, 10) = (2, 7, 6, 10) \\ p_2 &= p_2(2, 10) = (2, 8, 9, 12, 11, 10) \\ p_3 &= p_3(2, 10) = (2, 1, 8, 9, 12, 11, 10) \\ p_4 &= p_4(2, 10) = (2, 1, 8, 7, 3, 6, 10) \\ p_5 &= p_5(2, 10) = (2, 7, 3, 6, 10) \\ p_6 &= p_6(3, 15) = (3, 7, 9, 13, 15) \\ p_7 &= p_7(3, 15) = (3, 4, 5, 10, 11, 12, 14, 15) \\ p_8 &= p_8(3, 15) = (3, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_9 &= p_9(3, 15) = (3, 6, 7, 9, 13, 15) \\
p_{10} &= p_{10}(3, 15) = (3, 6, 10, 11, 12, 13, 15) \\
p_{11} &= p_{11}(3, 15) = (3, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15) \\
p_{12} &= p_{12}(4, 8) = (4, 3, 7, 8) \\
p_{13} &= p_{13}(4, 8) = (4, 6, 7, 2, 8) \\
p_{14} &= p_{14}(4, 8) = (4, 6, 7, 2, 1, 8) \\
p_{15} &= p_{15}(4, 8) = (4, 6, 7, 8) \\
p_{16} &= p_{16}(4, 8) = (4, 5, 10, 11, 12, 9, 8).
\end{aligned}$$



Kuva 3.9: OD-parin (3, 15) polkukustannukset.



Kuva 3.10: OD-parin (3, 15) polkuvirtaukset.

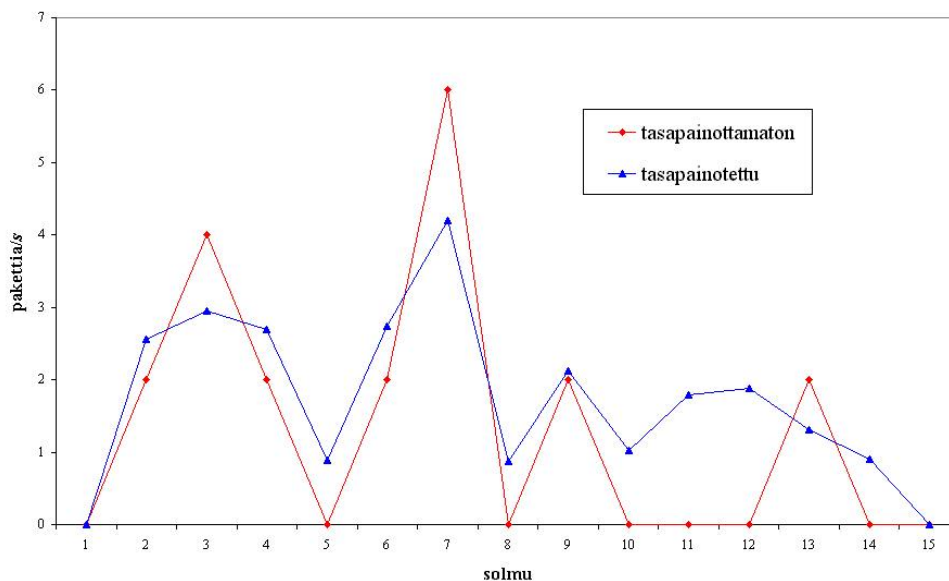
Käytössä olevien reittien liikennevirrat ovat

$$\begin{array}{lll}
 x_1 = 0,95658 & x_6 = 0,91563 & x_{12} = 0,68348 \\
 x_2 = 0,44821 & x_7 = 0,69656 & x_{13} = 0,49999 \\
 x_3 = 0,32359 & x_8 = 0,08236 & x_{14} = 0,06401 \\
 x_4 = 0,10320 & x_9 = 0,16268 & x_{15} = 0,56595 \\
 x_5 = 0,16842 & x_{10} = 0,02546 & x_{16} = 0,18657 \\
 & & x_{11} = 0,11731
 \end{array}$$

Tarkastellaan verkon G_1 liikennevirtoja, kun

- a) käytetään vain lyhintä reittiä;
- b) liikenne on tasapainotettu.

Laskemalla linkkivirtausvektorit voidaan verrata eri solmujen lähettämien pakettien määrää. Kuvassa 3.11 (s. 68) esitetään solmujen lähetysfrekvenssit

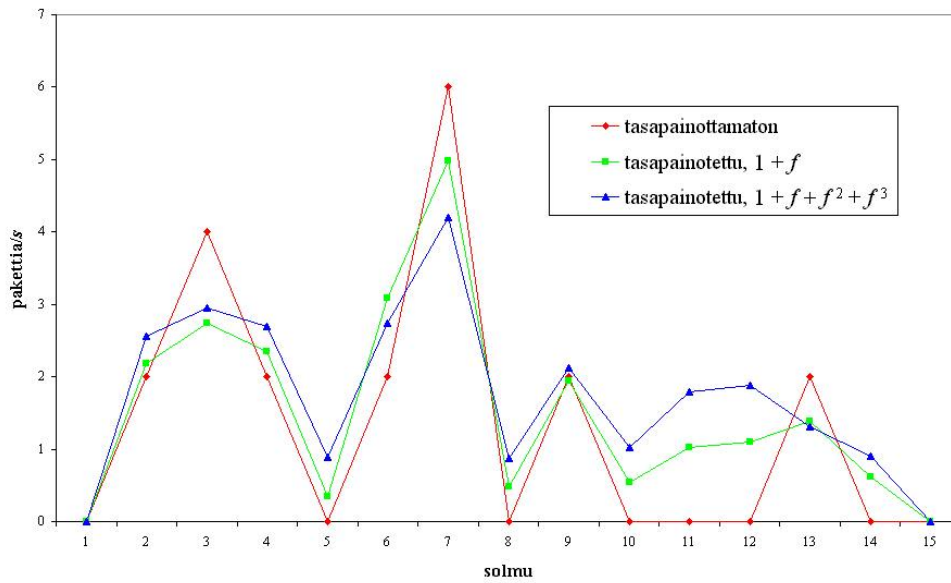


Kuva 3.11: Verkon G_1 solmujen lähetyshävyt.

lyhimmän polun reitityksellä ja tasapainotetulla reitityksellä. Kuvasta nähdään, että lyhimmän polun reitityksellä verkkoon muodostuu ruuhkainen solmukohta. Verkkoa tasapainotettaessa liikenne jakautuu tasaisemmin verkon solmujen kesken. Kuormittamalla käyttämättömiä solmuja saadaan ruuhkaisimman solmun liikennemäärää vähennettyä kolmanneksella ja toiseksi ruuhkaisimman solmun liikennemäärää neljänneksellä.

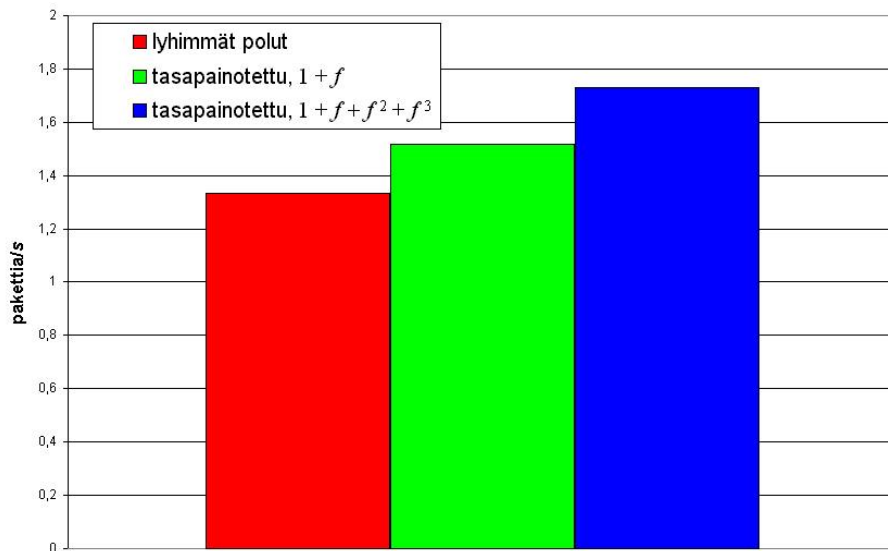
Otetaan tarkasteluun mukaan linkkikustannuksilla $1 + f_i$ saatu tasapainotila. Tällöin voidaan tutkia kustannusfunktion vaikutusta solmujen liikennemääriin. Kuvassa 3.12 (s. 69) on edellisen kuvan tapaan verkon G_1 solmujen lähetyshävyt eri reititysmuodoilla. Taulukon 3.3 tasapainotustulosten mukaan lineaarisilla linkkikustannuksilla suoritettuna tasapainotuksen jälkeen on käytössä 10 reittiä. Tämä tarkoittaa liikenteen ”maltillisempaa” reititystä. Nyt tasapainotuksessa ei oteta käyttöön pisimpiä reittejä. Kuvasta 3.12 nähdään, että tällöin verkon ruuhkaisimman kohdan liikenteestä saadaan vähennettyä vain kuudesosa.

Tasapainotuksen varjopuolena on verkon liikennemäärän kasvaminen. Kun reitin pituutta kasvatetaan, kasvaa myös paketin perille saantiin tarvittavien lähetysten lukumäärä. Näin siis ruuhkaisten solmujen liikennettä rauhoitetaan solmujen keskimääräisen liikennemäärän kasvun kustannuksella. Ku-



Kuva 3.12: Verkon G_1 solmujen lähetyshävyt.

vasta 3.13 nähdään, miten verkon G_1 keskimääräinen liikennemäärä kasvaa lyhimmän polun reitityksestä ensimmäisessä ja kolmannessa tasapainotuksessa.



Kuva 3.13: Verkon G_1 solmujen keskimääräinen lähetyshävy.

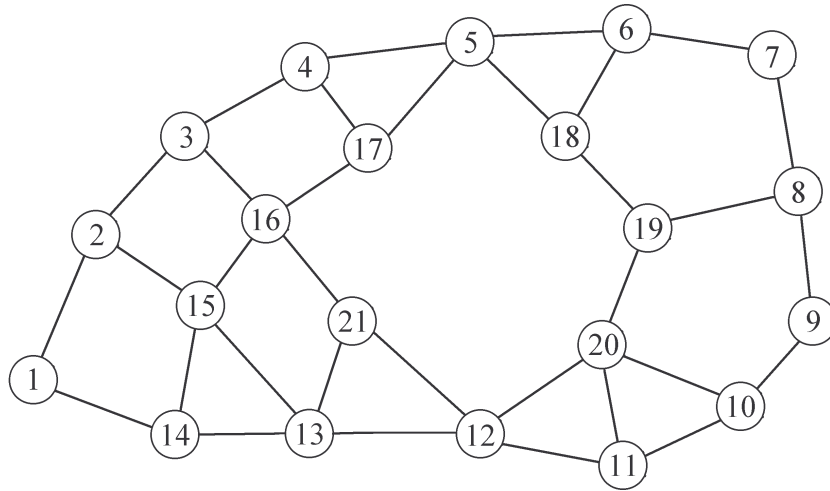
Kuvien 3.11 (s. 68) ja 3.12 (s. 69) perusteella verkon tasapainottamisella saavutettavista hyödyistä todettiin jo ruuhkautumisen väheneminen. Vaikka esimerkiverkon G_1 päätelaitteiden kapasiteetti riittäisikin suuren lähetysnopeuden ylläpitämiseen, saadaan tasapainotuksella positiivisia vaikutuksia myös päätelaitteiden virrankulutukseen. Verkkoon ei enää muodostu keskeistä välittäjäsolmua, joka kuluttaisi akkunsa nopeasti tyhjäksi. Verkon kokonaisvirrankulutus toki kasvaa pakettien lähetyskertojen lisääntyessä, mutta tasapainottaminen pidentää verkon absoluuttista elinikää. Todettakoon vielä, että ruuhkautumisen vähenemisen ja verkon eliniän kasvamisen myötä tasapainottaminen tuo mukanaan monia hyvin toimivalle verkolle ominaisia piirteitä.

Tarkasteltaessa verkon G_1 tasapainotuksessa käyttöön otettuja reittejä ja verkon rakennetta voidaan havaita joitakin kyseenalaisia reitinvalintoja. Reittien mielekkyyttä pohdittaessa on huomattava, että tässä simulaatiossa kustannukset lasketaan kaikille OD-pareja yhdistäville poluille. Linkki- ja polkukustannusfunktioiden muodon ansiosta on pitkälläkin poluilla mahdollista saavuttaa alhaiset kustannukset. Tilanteen korjaamiseksi käytännön sovelluksissa käytettävissä olevien reittien lukumäärää rajoitetaan. Tietoliikenneverkoissa ruuhkat eivät muodostu solmujen välisiin linkkeihin, vaan paketteja lähetäviin solmuihin. Näin ollen tietoliikennesovelluksissa jätetään huomiotta reitit, jotka kulkevat jonkin lyhemmän reitin solmujen kautta (ed. esim. OD-parilla w_2 reitti p_8 sisältää kaikki reitin p_6 solmut, mutta rasittaa näiden lisäksi kolmea muuta solmua).

Kustannusfunktioita voidaan parantaa muokkaamalla linkkikustannusten vakio termejä tai ottamalla käyttöön laajennetun mallin mukaiset linkkikustannukset. Toinen tapa parantaa kustannusfunktioita on muotoilla polkukustannukset (3.2) siten, että polun pituus otetaan huomioon.

Kuvia 3.9 (s. 66) ja 3.10 (s. 67) tarkasteltaessa voidaan todeta, että tasapainotusmenetelmässä riittänee suurempikin lopetuskriteeri – ilmeisesti edellä kuvattuja positiivisia vaikutuksia saadaan ”epätarkemmallakin” tasapainotuksella. Lisäksi iteraatiokierrosten väheneminen on jo sinänsä hyvä asia. Esitetään vielä kaksi tasapainotusesimerkkiä, joissa käytetään lopetuskriteeriä $\varepsilon = 0,01$. Esimerkin 7 tapaan suoritetaan tasapainotukset kolmesti linkkikustannuksilla $1 + f_i$, $1 + f_i + f_i^2$ ja $1 + f_i + f_i^2 + f_i^3$.

Esimerkki 8. Tarkastellaan Kuvan 3.14 verkkoa G_2 .



Kuva 3.14: Verkko G_2 .

Tasapainotetaan Taulukon 3.4 mukainen liikenne.

OD-pari	pakettia/sekunti	lyhin polku
(1, 20)	1	1, 14, 13, 12, 20
(2, 7)	1	2, 3, 4, 5, 6, 7
(3, 10)	1	3, 16, 21, 12, 11, 10
(4, 11)	1	4, 17, 16, 21, 12, 11
(7, 2)	1	7, 6, 5, 4, 3, 2
(10, 3)	1	10, 11, 12, 21, 16, 3
(11, 4)	1	11, 12, 21, 16, 17, 4
(20, 1)	1	20, 12, 13, 14, 1

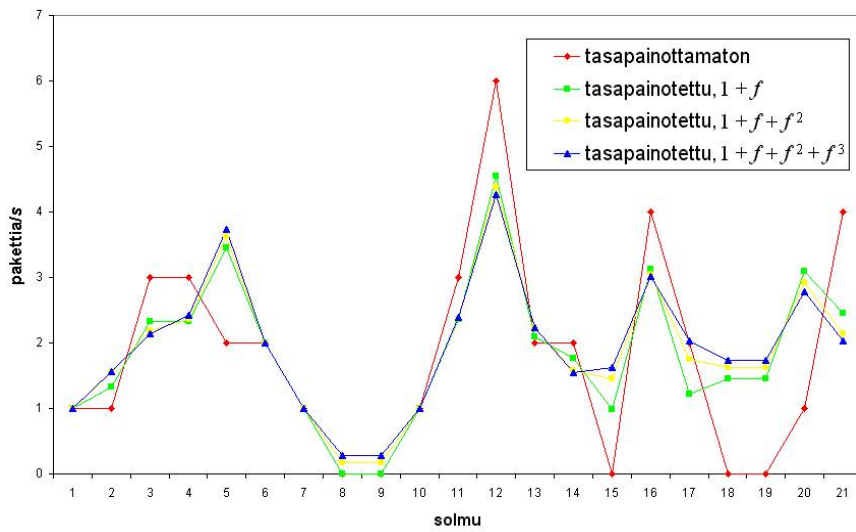
Taulukko 3.4: Verkon G_2 liikenne.

Valituilla parametreilla tasapainotuksessa päästään Taulukossa 3.5 (s. 72) näkyviin tuloksiin.

Kuvassa 3.15 (s. 72) esitetään verkon G_2 solmujen lähetysfrekvenssit lyhimmän polun reitityksellä ja kolmella tasapainotetulla reitityksellä. Kuvasta 3.16 (s. 72) ilmenee verkon G_2 solmujen keskimääräisen lähetysfrekvenssin kasvu eri kustannusfunktioilla.

linkkikustannus	iteraatioita	reittejä käytössä
$1 + f_i$	16	18
$1 + f_i + f_i^2$	33	24
$1 + f_i + f_i^2 + f_i^3$	53	28

Taulukko 3.5: Verkon G_2 tasapainotuksen tulokset.

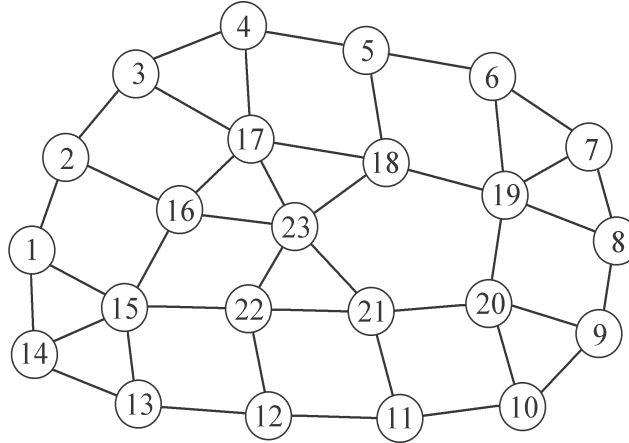


Kuva 3.15: Verkon G_2 solmujen lähetyshäviöt.



Kuva 3.16: Verkon G_2 solmujen keskimääräinen lähetyshäviö.

Esimerkki 9. Tarkastellaan Kuvan 3.17 verkkoa G_3 .



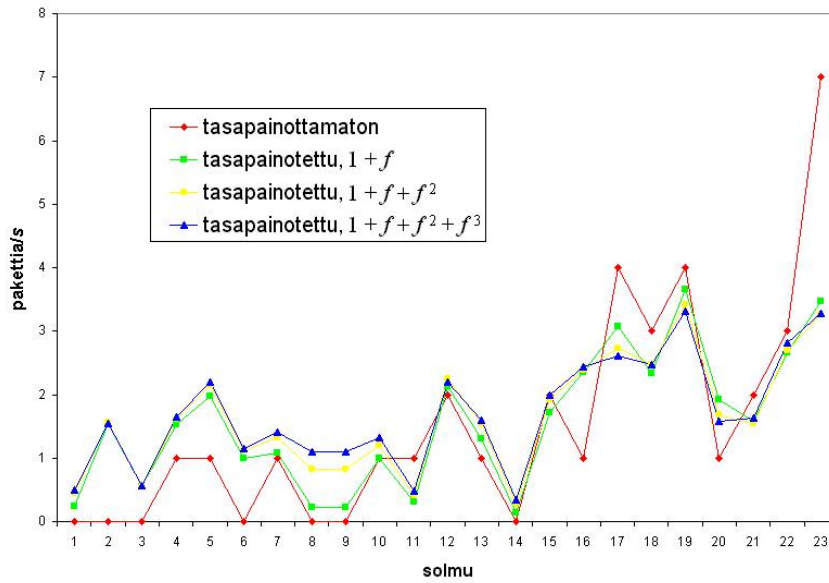
Kuva 3.17: Verkko G_3 .

Tasapainotetaan Taulukon 3.6 mukainen liikenne.

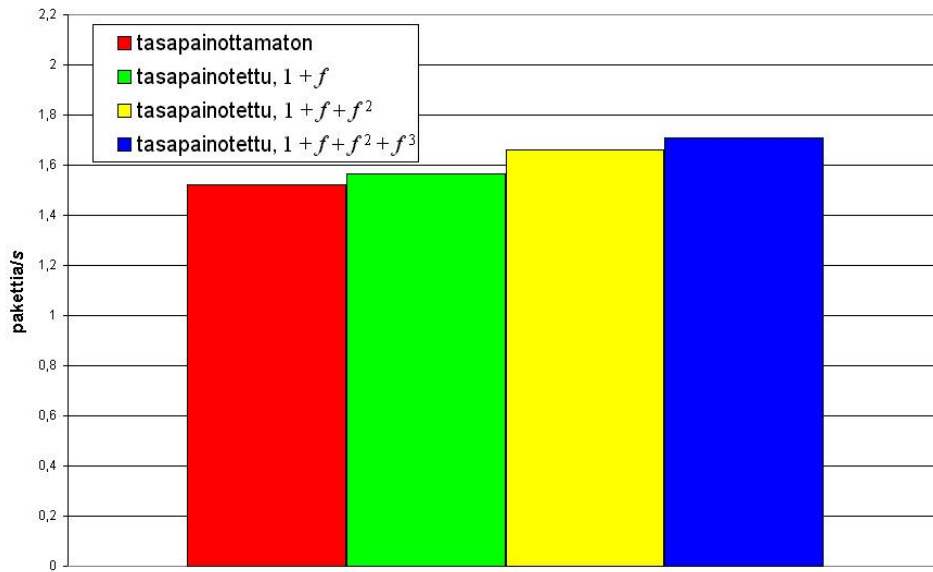
OD-pari	pakettia/sekunti	lyhin polku
(4, 21)	1	4, 17, 23, 21
(5, 20)	1	5, 18, 19, 20
(7, 1)	1	7, 19, 18, 23, 16, 15, 1
(10, 3)	1	10, 11, 21, 23, 17, 3
(12, 4)	1	12, 22, 23, 17, 4
(13, 11)	1	13, 12, 11
(15, 6)	1	15, 22, 23, 18, 19, 6
(19, 21)	1	19, 20, 21
(21, 17)	1	21, 23, 17
(22, 3)	1	22, 23, 17, 3

Taulukko 3.6: Verkon G_3 liikenne.

Kuvassa 3.18 (s. 74) esitetään jälleen verkon G_3 solmujen lähetysfrekvenssit lyhimmän polun reitityksellä ja kolmella tasapainotetulla reitityksellä. Kuvassa 3.19 (s. 74) näkyy verkon G_3 solmujen keskimääräisen lähetysfrekvenssin kasvu eri kustannusfunktioilla.



Kuva 3.18: Verkon G_3 solmujen lähetyshävyt.



Kuva 3.19: Verkon G_3 solmujen keskimääräinen lähetyshävy.

Tässä kappaleessa havainnollistettiin tietoliikenneverkon tasapainotuksella saavutettavia etuja. Esimerkeissä 7-9 näytettiin, miten suhteellisen vähäisellä liikenteen lisäämisellä voidaan verkon ruuhkakohtien liikennettä saada vähenemään reilusti. Tämä vähentää verkon keskeisimpien välittäjäsolmujen virrankulutusta, jolloin verkon elinikä pitenee.

Ruuhkautumisen väheneminen aiheuttaa ketjureaktion, jossa lopulta pakettien uudelleen lähetyksen tarve pienenee. Näin ollen erittäin ruuhkaisissa verkoissa siirtyminen lyhimmän polun reitityksestä tasapainotettuun reititykseen voi tuoda merkittäviä parannuksia solmujen virrankulutukseen.

Lähdeluettelo

- [1] C. Baiocchi - A. Capelo: *Variational and Quasivariational Inequalities*, John Wiley & Sons, Chichester, 1984
- [2] R. P. Grimaldi: *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison Wesley Longman, New York, 1999
- [3] S. Han: Dynamic traffic modelling and dynamic stochastic user equilibrium assignment for general road networks, *Transp. Res.* **37B** (2003), 225-249
- [4] P. T. Harker - J-S. Pang: Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications, *Math. Program.* **48** (1990), 161-220
- [5] J. W. Harris - H. Stocker: *Handbook of Mathematics and Computational Science*, Springer-Verlag, New York, 1998
- [6] D. Kinderlehrer - G. Stampacchia: *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, 1980
- [7] I. Konnov: *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 2001
- [8] K. Lieska - E. Laitinen: Optimization of GoS of cellular network, *Proc. 13th IEEE international symposium on personal, indoor and mobile radio communications* (2002), 2277-2280
- [9] J-L. Lions - G. Stampacchia: Variational inequalities, *Commun. Pure Appl. Math.* **20** (1967), 493-519
- [10] W. S. Massey: *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1991

- [11] A. Nagurney: *Network Economics: a Variational Inequality Approach. Revised second edition*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999
- [12] M. Patriksson: *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*, VSP, Utrecht, 1994
- [13] C. E. Perkins: *Ad Hoc Networking*, Addison-Wesley, Boston, 2001
- [14] E. M. Royer - C-K. Toh: A review of current routing protocols for ad hoc mobile networks, *IEEE Personal Communications* **6** (1999), 46-55
- [15] M. J. Smith: The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria, *Transp. Res.* **13B** (1979), 295-304
- [16] J. G. Wardrop: Some theoretical aspects of road traffic research, *Proc. Institute of civil engineers* (1952), 325-378
- [17] G. Zoutendijk: *Methods of Feasible Directions* Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1960