Liikenteen tasapainotus tietoliikenneverkossa variaatioepäyhtälöiden avulla

Jaana Karvonen

20.3.2003

Sisältö

Johdanto

Tutkielman tarkoituksena on tutustua variaatioepäyhtälöihin ja niiden käyttöön reitin tasapainotusongelman ratkaisemisessa. Lisäksi työssä tutustutaan ad hoc radioverkon reititykseen.

Variaatioepäyhtälöitä voidaan käyttää erilaisten ongelmien ratkaisukeinona lähtien yksinkertaisista yhtälöryhmistä tai minimointiongelmista päätyen hyvinkin monimutkaisiin ongelmiin. Variaatioepäyhtälöiden verkkosovellutukset liittyvät verkon tasapainotukseen, oli kyseessä sitten taloudellinen- tai liikenneverkko. Yhteistä variaatioepäyhtälöillä ratkaistaville ongelmille on, että haetaan kiinteää ratkaisua, kun yhtälössä oleva muuttuja kuuluu tiettyyn joukkoon. Esimerkiksi liikenneverkon tasapainotilan etsimiseen ja laskemiseen kehitetään aktiivisesti uusia variaatioepäyhtälöihin perustuvia menetelmiä.

Ad hoc -verkot ovat liikkuvia langattomia verkkoja, joilla ei ole kiinteää tukiasemaverkostoa, vaan ne huolehtivat itse reitityksestä. Ad hoc -verkko on edullinen ja nopeasti toimintaan saatava vaihtoehto, jos alueella ei ole olemassa runkoverkkoa. Tänä päivänä tehdään runsaasti ad hoc -verkkoihin liittyvää tutkimusta. Erityisesti verkon reitittämiseen ja tasapainotukseen soveltuvat matemaattiset menetelmät ovat suuren mielenkiinnon kohteena, koska perinteiset kiinteiden verkkojen reititysalgoritmit eivät sovellu dynaamisille ad hoc -verkoille.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa tutustutaan lyhyesti tasapainotukseen liikenneverkoissa. Koska tarkoituksena on tutustua tasapainotukseen variaatioepäyhtälöiden avulla, esitetään toisessa luvussa määritelmiä ja yksinkertaisia sovelluksia liittyen variaatioepäyhtälöihin. Pääasiallisena lähteenä luvun alkupuolella on käytetty teosta [7] teoksen [6] ollessa tärkeänä täydentäjänä. Perusmääritelmien jälkeen tarkastellaan hieman tarkemmin minimointiongelmaa ensin kaksiulotteisessa avaruudessa ja sen jälkeen yleisemmässä konveksissa joukossa. Komplementaarisen ongelman avulla minimointiongelmalle saadaan yksinkertaisempi muoto. Tässä vaiheessa lähteinä ovat olleet myös teokset [1, 2, 5].

Toisen luvun lopulla perehdytään esteongelmaan ja sen fysikaalisen muotoilun kautta päästävään ongelman variaatioepäyhtälömuotoiluun. Esteongelmaan liittyen nojaudutaan jo aiemmin käytettyihin teoksiin [1, 2, 6].

Kolmannessa luvussa tutkitaan liikenneverkon tasapainotuksen variaatioepäyhtälömuotoilua eri tilanteissa. Koko luvun ajan oletetaan kysynnän olevan tiedetty ja vakio, mutta muut kriteerit vaihtelevat. Kappaleessa annetaan tasapaino-ongelmalle kaksi toisistaan poikkeavaa muotoilua ja lopuksi vertaillaan eri muotoilujen ratkaisujoukkojen välisiä yhteyksiä. Lähteinä käytetään teoksia [3, 4, 10], joista suurin merkitys on teoksella [4].

Neljännessä luvussa perehdytään ad hoc -verkkoihin lähteinä [8, 9, 11]. Aluksi tutustutaan pintapuoleisesti verkon käyttömahdollisuuksiin ja reititykseen. Sitten perehdytään seikkaperäisesti AODV-reititysprotokollaan, joka on nykyään käytetyin ad hoc -verkon reititysprotokolla. Tarkka tutustuminen protokollaan tehdään, jotta päästäisiin hyvin sisälle ad hoc -verkon reititysmaailmaan variaatioepäyhtälöiden soveltamista ajatellen.

1. Liikenteen tasapaino-ongelma tietoliikenneverkossa

Tässä luvussa tutustutaan lyhyesti tietoliikenneverkon rakenteeseen ja tasapaino-ongelmaan yleisesti.

Liikenneverkko $G = [N, L]$ koostuu *solmujen* $i \in N$ epätyhjästä joukosta ja ei-negatiivisesta määrästä suunnattuja *kaaria* $k = (i, j) \in L$, jotka ovat solmujen i ja j välissä. *Polut* koostuvat jonosta kaaria ja ovat syklittömiä. Kun tutkitaan virtausta liikenneverkossa, määritellään lähde-kohdesolmuparien w joukoksi W. *Matkustustarve* d_w määritellään parin $w \in W$ välillä kulkevaksi virtaukseksi. Matkustustarve jakaantuu solmuparia w yhdistävien polkujen joukkoon $\mathcal{P}_w$, joka kuuluu kaikkien polkujen joukkoon $\mathcal{P}$. Virtaus polulla p on x_p ja virtaus kaaressa k on f_k.

Jokaiseen kaareen ja polkuun liittyy tietty kustannus, joka voi riippua paitsi käytetystä reitistä, myös muusta kaarta tai polkua käyttävästä liikenteestä. Tasapainotuksella pyritään minimoimaan liikenteen kokonaiskustannukset, jolloin minimoituvat myös yksittäisten verkon käyttäjien kustannukset. Kustannukseksi voidaan ajatella myös viestin kulkemiseen kuluva aika eli viive. Olkoon $C(x)$ verkon kokonaiskustannusfunktio. Tällöin tasapainotusongelmana on löytää sellainen polkukustannus $x^* > 0$, että kaikilla verkon lähde-kohdesolmupareilla $w \in W$ ja kaikilla poluilla $q \in \mathcal{P}_w$ kustannusfunktio

$$C_q(x^*) = \min_{p \in \mathcal{P}_W} C_p(x^*).$$

Tässä tilanteessa yksikään verkon käyttäjistä ei voi alentaa kustannuksiaan muuttamalla reittiä. Saatu ongelma on yhtenevä variaatioepäyhtälöongelman kanssa.

Kun verkot monimutkaistuvat, tulee tasapainotusongelmasta vaikea, eikä sen analyyttinen ratkaiseminen onnistu järkevässä ajassa. Tästä syystä variaatioepäyhtälöiden ratkaisemiseen soveltuvat numeeriset menetelmät ovat tärkeitä tasapainotusongelman ratkaisemisessa. Seuraavassa luvussa tutustumme variaatioepäyhtälöihin. Variaatioepäyhtälöiden perusasioihin ja joihinkin verkkoihin liittyviin tärkeisiin sovellutusongelmiin tutustumisen jälkeen palaamme tasapainotusongelmaan luvussa 3.

2. Variaatioepäyhtälöistä

Tämän luvun ensimmäisessä osassa esitetään variaatioepäyhtälöihin liittyviä määritelmiä ja muutamia niihin liittyviä pieniä huomautuksia ja sovelluksia. Määritelmien lähteenä on ollut teos [7]. Huomautuksiin ja sovelluksiin lähteenä on käytetty myös teoksia [1, 2, 5, 6]. Toisessa osassa tutustutaan esteongelmaan, joka on oleellinen tietyissä liikenneverkkoihin liittyvissä tilanteissa. Myös esteongelmalle tehdään variaatioepäyhtälömuotoilu.

2.1 Yksinkertaisia variaatioepäyhtälömuotoiluja

Olkoon U epätyhjä, suljettu ja konveksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja $G : U \to \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Merkinnällä $(\cdot, \cdot)$ tarkoitetaan jatkossa sisätuloa.

Ongelmaa (2.1)

$$\begin{array}{c}\text{Etsi sellainen piste } u^* \in U, \text{ että} \\ (G(u^*), u - u^*) \geq 0 \text{ aina, kun } u \in U\end{array} \tag{2.1}$$

kutsutaan *variaatioepäyhtälöongelmaksi*. Vastaavasti ongelmaa

$$\begin{array}{c}\text{Etsi sellainen piste } u^* \in U, \text{ että} \\ (G(u), u - u^*) \geq 0 \text{ aina, kun } u \in U,\end{array} \tag{2.2}$$

kutsutaan *duaaliseksi variaatioepäyhtälöongelmaksi.*

Olkoon jatkossa U^* yhtälön (2.1) ratkaisujoukko ja U^d yhtälön (2.2) ratkaisujoukko.

Variaatioepäyhtälöt reaaliavaruudessa. Jos yhtälössä (2.1) $U = \mathbb{R}^n$, päädytään etsimään pistettä u^*, jolle $G(u^*) = 0$, sillä yhtälö (2.1) pätee kaikilla pisteillä u, jotka kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Tällöin, jos

$$(G(u^*), u - u^*) \geq 0,$$

on olemassa myös sellainen piste $u' \in \mathbb{R}^n$, että vektorin $u - u^*$ suunta on vastakkainen vektorin $u' - u^*$ suunnalle. Silloin

$$(G(u^*), u' - u^*) \leq 0$$

ja variaatioepäyhtälö toteutuu vain, kun $G(u^*) = 0$.

Yksinkertaisin variaatioepäyhtälön muodostumiseen johtava ongelma lienee reaalinen ja lineaarinen yhtälöryhmä. Olkoon yhtälöryhmä

$$Mu^* = -q. \tag{2.3}$$

Tällöin, kun valitaan $G(u) = Mu + q$, päädytään variaatioepäyhtälön (2.1) kanssa ekvivalenttiin muotoon $G(u^*) = 0$.

Seuraavan määritelmän on lähteenä käytetty teosta [6].

Määritelmä 1. Pisteen u sanotaan olevan funktion $T : U \to U$ *kiintopiste*, jos $T(u) = u$.

Kiintopisteongelma. Olkoot U konveksi ja suljettu avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja $T : U \to U$ jatkuva kuvaus. Tällöin kiintopisteen u^* etsiminen voidaan muokata variaatioepäyhtälömuotoon, kun määritellään $G(u) = u - T(u)$. Tällöin $(G(u^*), u - u^*) \geq 0$, eli $G(u^*) = 0$, jolloin $T(u^*) = u^*$.

Määritelmä 2. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ konveksin osajoukon U sanotaan olevan *konveksi kartio*, jos ehdot

(i) kun $u \in U$ ja $\lambda \geq 0$, niin $\lambda u \in U$

(ii) kun $u, y \in U$, niin $u + v \in U$

(iii) kun $u, -u \in U$, niin $u = 0$

täyttyvät.

Perehdytään nyt pariin perusongelmaan hieman tarkemmin. Lähteinä on käytytty pääosin teoksia [1, 6]. Ensimmäisenä tarkasteltava minimointiongelma on lähtökohtana useille ongelmille, sillä yleensä pyritään taloudelliseen toteuttamistapaan, jolloin minimin löytäminen on oleellista.

Minimointiongelma. Tarkastellaan minimointiongelmaa kaksiulotteisessa avaruudessa. Olkoon f sileä reaaliarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukkona on suljettu väli $I = [a, b]$. Etsitään sellaista pistettä $x_0 \in I$, jolle

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

Tällöin voi toteutua kolme eri tilannetta:

(i) Jos $a < x_0 < b$, niin $f'(x_0) = 0$.

(ii) Jos $x_0 = a$, niin $f'(x_0) \geq 0$ ja $(x - x_0) \geq 0$.

(iii) Jos $x_0 = b$, niin $f'(x_0) \leq 0$ ja $(x - x_0) \leq 0$.

Kuva 2.1: Minimitapaukset (i), (ii) ja (iii)

Kun yhdistetään nämä tilanteet, niin saadaan variaatioepäyhtälö

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \text{ aina, kun } x \in I,$$

jonka ratkaisu x_0 antaa funktion f minimin alueessa I.

Tarkastellaan samaa minimointiongelmaa yleisemmässä alueessa. Olkoon f sileä reaaliarvoinen funktio suljetussa konveksisissa joukossa $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $x \in U$ ja etsitään sellaista pistettä $x_0 \in U$, että

$$f(x_0) = \min_{x \in U} f(x).$$

Koska U on konveksi, kuuluu myös piste

$$(1 - t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0)$$

joukkoon U aina, kun $0 \leq t \leq 1$. Nyt funktio

$$\Phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)), 0 \leq t \leq 1,$$

saavuttaa miniminsä pisteessä $t = 0$, joten

$$\Phi'(0) = \mathrm{grad} f(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

aina, kun $x \in U$. Seurauksena saadaan, että $x_0 \in U$ toteuttaa variaatioepäyhtälön

$$\mathrm{grad} f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \tag{2.4}$$

aina, kun $x \in U$.

Komplementaarinen ongelma. Olkoon K konveksi kartio avaruudessa $\mathbb{R}^n$. *Komplementaarinen ongelma* on löytää sellainen piste $u^* \in K$, että

$$G(u^*) \in K', \qquad (G(u^*), u^*) = 0, \tag{2.5}$$

missä $K' = \{v \in \mathbb{R}^n | (u, v) \geq 0 \text{ aina, kun } u \in K\}$ on kartion K duaalikartio.

Seuraava lause osoittaa, että komplementaarinen ongelma (2.5) on yhtenevä variaatioepäyhtälön (2.1) kanssa. Edellisessä ongelmassa lähteenä on käytetty teoksia [2, 5, 6, 7] ja seuraavassa lauseessa teosta [7].

Lause 2.1. *Olkoon K konveksi kartio avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällöin $u^* \in K$ toteuttaa variaatioepäyhtälön (2.1) muodossa*

$$(G(u^*), u - u^*) \geq 0 \textit{ aina, kun } u \in K$$

jos ja vain jos se toteuttaa yhtälöparin

$$\begin{cases} (G(u^*), u) \geq 0 \textit{ aina, kun } u \in K \\ (G(u^*), u^*) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Todistus. Oletetaan, että (2.6) on voimassa. Tällöin

$$(G(u^*), u) - (G(u^*), u^*) \geq 0 \text{ aina, kun } u \in K,$$

josta suoraan seuraa variaatioepäyhtälö (2.1). Oletetaan seuraavaksi, että variaatioepäyhtälö (2.1) on voimassa. Tällöin, kun korvataan u vektorilla $u^* + u$, joka konveksin kartion määritelmän perusteella kuuluu joukkoon K kunhan $u, u^* \in K$, saadaan

$$(G(u^*), u^* + u - u^*) \geq 0 \text{ aina, kun } u \in K.$$

Tästä suoraan saadaan

$$(G(u^*), u) \geq 0 \text{ aina, kun } u \in K,$$

joka on sama kuin ryhmän (2.6) ensimmäinen yhtälö. Myös $0 \in K$, joten korvaamalla sillä u, saadaan

$$(G(u^*), -u^*) \geq 0,$$

josta seuraa

$$(G(u^*), u^*) \leq 0.$$

Täten saadaan jo todistetun yhtälöryhmän ensimmäisen osan perusteella, että myös yhtälö

$$(G(u^*), u^*) = 0$$

pätee. □

Komplementaarisen ongelman avulla saadaan myös minimointiongelma (2.4) muotoon

$$(\text{grad } f(x_0))(x_0) = 0,$$

kunhan vain komplementaarisen ongelman oletukset toteutuvat.

2.2 Esteongelma

Tämän kappaleen alussa perehdytään esteongelmaan. Kappaleen loppupuolella johdetaan esteongelmalle variaatioepäyhtälömuotoilu. Lähteinä on käytetty teoksia [1, 2, 6].

Esteongelman ratkaiseminen on tässä yhteydessä oleellista, sillä jos liikenneverkkoa käytetään liiaksi samalta alueelta, voi jokin osa verkosta tukkeutua, jonka jälkeen on siirryttävä käyttämään muita reittejä. Voidaan siis ajatella, että esimerkiksi verkon keskelle muodostuu este, joka on kierrettävä (ks. kappale 4.3, sivu 41). Tällöin monimutkaisessa verkossa variaatioepäyhtälömuotoilun avulla saavutettava ongelman numeerinen ratkaisu on hyödyllinen.

2.2.1 Ongelman määrittely

Tässä kappaleessa lähteenä on käytetty teosta [1]. Tutustutaan esteongelmaan havainnollisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^2$ on *este* ja pisteet u ja v ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ pisteitä, mutta eivät kuulu alueeseen A. Yhdistetään pisteet u ja v painottomalla elastisella nauhalla, joka ei voi kulkea esteen A läpi. Kiinnostuksen kohteena on nauhan ottama muoto tässä tilanteessa. Asetetaan x-akseli kulkemaan pisteiden u ja v kautta, eli $u = (0, 0)$ ja $v = (l, 0)$. Oletetaan vielä, että negatiivisen y-akselin alueella, x-akselin avoimella välillä $(0, l)$ oleva osa esteen reunasta noudattaa yhtälöä $y = \psi(x)$, joka muodostaa jatkuvan reunan. Olkoon $y = \mu(x)$ yhtälö, jonka mukaan nauha asettuu.

Kuva 2.2: Esimerkkitapaukset esteongelmaan

Tällöin kokemuksen ja fysiikan lakien mukaan esteongelmalle pätevät säännöt

(i)
$$\mu(0) = \mu(l) = 0, \tag{2.7}$$
sillä nauha yhdistää x-akselilla olevat pisteet u ja v.

(ii)
$$\mu(x) \leq \psi(x), \tag{2.8}$$
sillä nauha kulkee esteen alta eikä kykene läpäisemään estettä.

(iii)
$$\mu''(x) \leq 0, \tag{2.9}$$
sillä nauha on elastinen ja ottaa siksi konveksin muodon.

(iv) jos
$$\mu(x) < \psi(x), \text{ niin } \mu''(x) = 0, \tag{2.10}$$
sillä nauha ottaa lyhyimmän mahdollisen pituuden. Sen se saa ottamalla lineaarisen muodon siellä, missä este ei määrää muotoa eli kosketa nauhaan.

Viimeisimmästä yhtälöstä seuraa myös, että jos estettä ei ole lainkaan, on nauhan pituus l ja se kulkee x-akselia pitkin. Viimeisin yhtälö voidaan muotoilla myös yhtälöksi
$$(\mu(x) - \psi(x))\mu''(x) = 0. \tag{2.11}$$
Tämä pätee, koska (2.10) on totta jos joko $\mu''(x) = 0$ tai $\mu(x) - \psi(x) = 0$, jolloin (2.11) pätee. Jos puolestaan oletetaan, että (2.11) pätee ja $\mu(x) \neq \psi(x)$, niin on oltava $\mu''(x) = 0$. Kun lisäksi ehdosta (2.8) seuraa, että $\mu(x) \neq \psi(x)$ vain, jos $\mu(x) < \psi(x)$, niin saadaan ehto (2.10).

Yhtälöt (2.7), (2.8), (2.9) ja (2.11) muodostavat matemaattisen muotoilun käsiteltävälle fysikaaliselle esteongelmalle. Ne eivät kuitenkaan määrittele ongelmaa täydellisesti, sillä ne eivät vielä mitenkään huomioi funktion μ derivoituvuutta. Jos esteen reunafunktio ψ on kahdesti derivoituva, on myös funktiolla μ sekä ensimmäinen että toinen derivaatta, eikä ongelmia esiinny. Jos funktio ψ on vain kerran derivoituva, täytyy funktion μ toinen derivaatta μ'' sekä siihen liittyvät säännöt (2.9) ja (2.11) määritellä toteutuvaksi *melkein kaikkialla*, eli säännöt toteutuvat lukuunottamatta äärellistä määrää yksittäisiä pisteitä. Samoin, jos μ derivoituu vain melkein kaikkialla, sallitaan se ja jätetään pois yksittäiset ongelmapisteet. Esimerkin toisessa tapauksessa (Kuva 2.2.1) on esteessä terävä nurkka, joten nauhan muotofunktio ei derivoidu yhdessä pisteessä.

Samoja määrityksiä esteongelmalle voidaan käyttää myös muissa reaaliavaruuksissa. Esteongelma voidaan määritellä myös toisin, ajatellen että nauha ottaa energiaminimin saavuttavan muodon.

2.2.2 Energia-ajattelusta variaatioepäyhtälöihin

Tässä kappaleessa lähteenä on käytetty teoksia [1, 2]. Kun esteongelman muodostavat este ja painoton elastinen nauha, joka on samanlainen koko pituudeltaan, voidaan nauhan ottama muoto arvioida energian

$$E(\nu) = \frac{1}{2}\int_0^l \nu'(x)^2 \mathrm{d}x \tag{2.12}$$

minimoinnilla. Tällöin esteongelma voidaan määritellä etsimällä sellaista arvoa $\mu \in \mathcal{K}$, että

$$E(\mu) = \min_{\nu \in \mathcal{K}} E(\nu), \tag{2.13}$$

missä ν on jatkuva ja joukko $\mathcal{K} = \{\nu | \nu(0) = \nu(l) = 0 \text{ ja } \nu \leq \psi\}$ on kaikkien mahdollisten nauhan ottamien muotojen joukko. Jotta ongelma olisi järkevä, ei joukko $\mathcal{K}$ voi olla tyhjä. Jotta joukkoon $\mathcal{K}$ kuuluu ainakin yksi mahdollinen muoto, täytyy $\psi(0^+) > 0$ ja $\psi(l^-) > 0$.

Kun oletetaan, että μ ja ν ovat mahdollisia arvoja energiayhtölöön (2.12), niin tällöin konveksisuuden perusteella myös $\lambda\nu + (1-\lambda)\mu$, kun $0 \leq \lambda \leq 1$, on mahdollinen arvo. Jos kuitenkin oletetaan yhtälön (2.13) mukaan, että μ miminoi energian, niin pätee

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_u^v (\mu')^2 \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{2}\int_u^v [(1-\lambda)\mu' + \lambda\nu']^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_u^v [(1-\lambda)^2(\mu')^2 + 2\lambda(1-\lambda)\mu'\nu' + \lambda^2(\nu')^2] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_u^v [(\mu')^2 - 2\lambda(\mu')^2 + \lambda^2(\mu')^2 + 2\lambda\mu'\nu' - 2\lambda^2\mu'\nu' + \lambda^2\nu'^2] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_u^v (\mu')^2 \mathrm{d}x + \lambda\int_u^v \mu'(\nu' - \mu') \mathrm{d}x + O(\lambda^2)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

pienelle positiiviselle luvulle λ. Jos nyt määrittelemme

$$a(\mu, \nu) = \int_u^v \mu'\nu' \mathrm{d}x,$$

niin saadaan yhtälön (2.14) perusteella

$$a(\mu, \nu - \mu) = \int_u^v \mu'(\nu' - \mu')\mathrm{d}x \geq 0$$

kaikille mahdollisille $\nu \in \mathcal{K}$. Siis saaduilla oletuksilla voidaan esteongelma ilmaista variaatioepäyhtälöongelmana:

Etsi sellainen $\mu \in \mathcal{K}$, että

$$\int_0^l \mu'(x)(\mu'(x) - \nu'(x))\mathrm{d}x \leq 0 \tag{2.15}$$

aina, kun $\nu \in \mathcal{K}$.

Lähteen [2] mukaan samat yhtälöt (2.12)-(2.15) pätevät myös, jos este kulkee nauhan alapuolelta (tällöin $\nu \geq \psi$), tai jos esteitä on kummallakin puolella nauhaa. Viimeisimmässä tapauksessa $\psi_2 \geq \nu \geq \psi_1$.

3. Verkkojen tasapaino-ongelma

Palataan nyt tarkastelemaan verkkojen tasapaino-ongelmaa perusteellisemmin. Tässä luvussa tutustutaan liikenneverkon tasapainotuksen variaatioepäyhtälömuotoiluun teosten [3, 4, 10] avulla. Luvun kummassakin kappaleessa tehdään muotoilut ja lasketaan tasapainotila pienelle esimerkkiverkolle. Saatuja tuloksia verrataan variaatioepäyhtälöihin perustuvalla ohjelmalla laskettuihin numeerisiin tasapainotuksiin.

Liikenneverkon tasapaino-ongelman käsittelyssä on kaksi suosittua tapaa. Toinen käyttää polkuvirtauksia ja toinen monihyödykkeisiä kaarivirtauksia. Yleisessä tapauksessa näillä muotoiluilla on eri ratkaisuja.

Tarkastellaan aluksi tasapainoa liikenneverkossa, jossa matkustustarpeet ovat kiinteät ja matkustaminen tapahtuu sellaisia reittejä pitkin, jotka minimoivat matkustushaitan (ajan, kustannukset tai usean haitan yhdistelmän). Matkustajat eivät tee yhteistyötä reittivalinnoissaan, vaan jokainen tekee päätökset itsenäisesti omaa etuaan hakien. Yleensä ongelma muotoillaan variaatioepäyhtälöillä.

Olkoon $G = [N, L]$ verkko, missä N on solmujen joukko ja L suunnattujen kaarten joukko. Olkoot k kaari, joka yhdistää solmuparin ja h syklitön polku, joka koostuu jonosta kaaria. Olkoon W lähde-kohdesolmuparien (merk. o/d) joukko. Olkoot $\mathcal{P}_w$ o/d-paria w yhdistävien polkujen joukko ja $\mathcal{P}$ kaikkien polkujen joukko verkossa G. Oletetaan lisäksi, että verkossa on m solmua, n kaarta ja p polkua.

3.1 Polkuvirtausmuotoilu

Olkoot f_k kokonaisvirtaus kaaressa $k = 1, \ldots, n$ ja $f \in \mathbb{R}^n$ ryhmitelty kaarten kokonaisvirtausvektori, jolloin $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$, sekä x_h kokonaisvirtaus polulla $h \in \mathcal{P}$, $h = 1, \ldots, p$. Ryhmitellään myös polkuvirtaukset vektoriksi

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^T$. Olkoon $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ kaari-polku -yhteysmatriisi, jossa

$$P_{kh} = \begin{cases} 1, \text{ jos kaari } k \text{ on polulla } h \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin kaarten kokonaisvirtauksen yhteys polkujen virtaukseen on

$$f = \mathbf{P}x, \tag{3.16}$$

eli kukin

$$f_k = \sum_{h \in \mathcal{P}} x_h P_{kh}.$$

Siis jokaisen kaaren kokonaisvirtaus saadaan kaarten kautta kulkevien polkujen virtausten summana.

Olkoon $c_k = c_k(f)$ kustannusfunktio kaarelle k. Yleisessä tapauksessa c_k on riippuvainen virtauksista myös muissa kuin k-kaaressa. Olkoot $c(f) = (c_1(f), \ldots, c_n(f))^T$ kaarten kustannusfunktioiden vektori ja $C_h : \mathbb{R}^p_+ \to \mathbb{R}$ polun h kustannusfunktio. Nyt voidaan olettaa, että

$$C_h(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(f) P_{kh}$$

ja merkitään $C = (C_1, C_2, \ldots, C_p)^T$. Tällöin malli on additiivinen, sillä polun kustannus on polulla olevien kaarten kustannusten summa.

Koska mallissa matkustustarpet ovat kiinteät, on nyt kysyntä parille w $d_w(\gamma) = d_w = vakio$. Yleisessä tapauksessa puhuttaisiin joustavan tai muuttuvan tarpeen mallista. Nyt matkustustarpeelle pätee lauseke

$$\sum_{h \in \mathcal{P}_w} x_h = d_w, \tag{3.17}$$

eli kaikkien polkujen yhteenlaskettu virtaus o/d-parin w välillä on sama kuin verkossa oleva matkustustarve samaisella välillä. Merkitään jatkossa yhtälöt (3.16) ja (3.17) toteuttavan virtauksen kuuluvan joukkoon $\mathbb{P}$, eli

$$\mathbb{P} = \{f | f \text{ toteuttaa yhtälöt (3.16) ja (3.17)}\}.$$

Olkoon lisäksi vakio γ_w minimikustannus, tai yleisemmin minimihaitta, o/d-parin w välillä. Vakion arvo ei aluksi ole tiedossa.

Systeemi on *Wardropin tasapainoperiaatteen* mukaan tasapainossa, jos kaikilla käytössä olevilla poluilla ($x_h^* > 0$) on yhtäsuuri ja minimaalinen matkustushaitta γ, eikä mikään verkossa kulkijoiden itsenäisesti valitsema reitti ole toista parempi. Jos jollain paria w yhdistävällä polulla ei ole virtausta, on haitta siellä yhtäsuuri tai suurempi kuin minimihaitta γ_w. Matemaattisesti Wardropin tasapainoperiaate saadaan esim. muotoon:

Virtausmallin x^* sanotaan olevan tasapainossa kaikille poluille $h \in \mathcal{P}$ jos ehdot

$$C_h(x^*) \begin{cases} = \gamma_w, \text{ jos } x_h^* > 0, \\ \geq \gamma_w, \text{ jos } x_h^* = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

täyttyvät. Tällöin siis polun kustannusfunktio arvolla x^* on yhtäsuuri kuin minimihaitta γ_w, jos virtaus x_h^* polulla h on suurempi kuin nolla, ja suurempi tai yhtäsuuri kuin minimihaitta, jos polulla ei ole virtausta. Tasapainoehdolle voidaan saada [4] ja [10] mukaan myös variaatioepäyhtälömuotoilu:

Etsi f^* joka kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$ ja jolle

$$(c(f^*), f - f^*) \geq 0 \tag{3.19}$$

aina, kun f kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$.

Jos matkustushaitan kriteerejä on useita, esimerkiksi kustannusten lisäksi matkustusaika $t_k : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, voidaan muodostaa matkustushaittafunktio

$$u_k = \alpha_1 c_k(f) + \alpha_2 t_k(f) \tag{3.20}$$

liittyen kaareen k. Tai jos haittafunktiot ovat $c_k^1(f), c_k^2(f), \ldots, c_k^j(f)$, on

$$u_k = \sum_{l=1}^{j} \alpha_l c_k^l(f).$$

Vakiot α_l ovat haittakertoimia, joille

$$\sum_l \alpha_l = 1.$$

Haittakertoimien α_l^i avulla voidaan määritellä verkolle eri käyttäjäryhmiä i kunkin verkon käyttäjän tarpeiden mukaan. Jos jollakin haittatekijällä on verkon käyttäjälle suuri merkitys, asetetaan haittakerroin suureksi, eli lähelle ykköstä. Jos jokin haittatekijä taas puolestaan ei merkitse käyttäjälle mitään, voi kerroin olla nolla tai lähellä sitä. Kun haittatekijöitä on vain kaksi, voidaan kertoimiksi käyttäjäryhmälle i ottaa $\alpha_1^i = \omega^i$ ja $\alpha_2^i = 1 - \omega^i$, missä ω^i on suljetulla välillä $[0, 1]$. Tällöin yhtälön (3.20) mukaan arvo $\omega^i = 0$ tarkoittaa matkaajaryhmää, jonka jäsenet ovat kiinnostuneita vain matkustusajasta ja tärkeää on päästä perille nopeasti. Arvo $\omega^i = 1$ puolestaan tarkoittaa luokkaa, jonka jäsenet voivat matkustaa vaikka päiväkausia kunhan matkustaminen on edullista. Kun paino sijoittuu välin sisälle, kuvataan luokkaa, jolle molemmat kriteerit merkitsevät vakioiden osoitamassa suhteessa ja haittafunktion mukaisesti.

Olkoon

$$v_h^i = \sum_{k=1}^{n} u_k^i(f) P_{kh}$$

matkustushaitta luokalle i polulla p. Tällöin myös monikriteerinen malli on additiivinen, eli luokittain havaittu polkukohtainen matkustushaitta on polulla olevien kaarten haittojen summa. Tasapainoehdot saadaan yhtälöä (3.18) vastaavasti muotoon

$$v_h^i(f^*) \begin{cases} = \gamma_w^i, \text{ jos } x_h^* > 0, \\ \geq \gamma_w^i, \text{ jos } x_h^* = 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

Funktio u_k on reaaliarvoinen, eli $u_k : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$. Ryhmitellän haittafunktiot vektoriksi $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, jolloin $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ on vektoriarvoinen funktio. Käytettäessä monesta haitasta yhdistettyä matkustushaittafunktiota muuttuu variaatioepäyhtälö muotoon

$$(u(f^*), f - f^*) \geq 0$$

aina, kun f kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$, kun etsitään kaarien kokonaisvirtausmallia f^*, joka myös kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$.

Esimerkki 1. Olkoon liikenneverkko neljän solmun verkko. Kaaria verkossa on viisi. Verkossa on yksi o/d-pari $w = (o, d)$.

Kuva 3.1: Esimerkkiverkko

Vaadittu virtaus $d_w = 2,5$ parin w välillä. Verkossa on kolme o/d-paria w yhdistävää polkua. Polut ovat $p_1 = (1,2)$, $p_2 = 3$ ja $p_3 = (4,5)$. Polkuvirtauksia merkitään vektorilla $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ja kaarivirtauksia vektorilla $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T$. Kaari-polku-yhteysmatriisi saa muodon

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siten saadaan $f = Px = (x_1, x_1, x_2, x_3, x_3)^T$.

Kaarten kustannusfunktioiden vektori on nyt

$$\begin{aligned} c(f) =& (c_1(f), c_2(f), c_3(f), c_4(f), c_5(f)) \\ =& (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_2, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_3, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_4, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_5). \end{aligned}$$

Polkujen kustannukset saadaan kaarten kustannusten summina, joten

$$\begin{cases} C_1(x) = c_1(f) + c_2(f) = 1 + \frac{1}{2}(f_1 + f_2) = 1 + x_1, \\ C_2(x) = c_3(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 \text{ ja} \\ C_3(x) = c_4(f) + c_5(f) = 1 + x_3. \end{cases}$$

Tällöin polkujen kustannusvektori

$$C(x) = (1 + x_1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2, 1 + x_3)^T.$$

Tasapaino saavutetaan kun polkujen virtaukset ovat tasapainovirtausten $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ suuruisia. Kun liikentaan määrä $d_w = 2,5$ jaetaan polkuvirtauksille, saadaan

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* = 2,5.$$

Lisäksi tiedetään, että

$$C_1(x^*) = C_2(x^*) = C_3(x^*),$$

joten

$$1 + x_1^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2^* = 1 + x_3^*.$$

Tästä välttämättä seuraa, että $x_1^* = x_3^*$, eli myös $2x_1^* + x_2^* = 2,5$. Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} \\ 2x_1^* + x_2^* = 2,5. \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $x_1^* = \frac{3}{8}$ ja $x_2^* = \frac{7}{4}$. Siis $x^* = (\frac{3}{8}, \frac{7}{4}, \frac{3}{8})^T$ ja $C(x^*) = (\frac{11}{8}, \frac{11}{8}, \frac{11}{8})^T$.

Variaatioepäyhtälöihin perustuvaa projektiomenetelmää (ks. [7]) käyttävä ohjelma antaa samalle tasapainotusongelmalle seuraavan taulukon mukaisia arvoja iteraation edetessä. Kriteerifunktio mittaa ratkaisussa olevaa virhettä.

Taulukko 3.1: Iteraatiot

iteraatio	x_1	x_2	x_3	kriteerifunktio
0	0,1875	2,31255		1,06066
2	0,27343	2	0,22656	0,62656
4	0,32530	1,86111	0,31358	0,27417
6	0,35177	1,79938	0,34884	0,12124
8	0,36439	1,77195	0,36366	0,05380
10	0,37021	1,75955	0,37003	0,02389
12	0,37285	1,75434	0,37280	0,01062
14	0,37404	1,75193	0,37403	0,00471
16	0,37457	1,75086	0,37457	0,00209
18	0,37481	1,75038	0,37480	0,00093
20	0,37491	1,75017	0,37491	0,00041
22	0,37496	1,75008	0,37496	0,00018
24	0,37498	1,75003	0,37498	0,00008

Ohjelma siis antaa numeerisen ratkaisun $x^* = (0,37498; 1,75003; 0,37498)^T$ 24 iteraatiolla, kun virhemarginaaliksi sallittiin $\varepsilon = 0,0001$.

Polkuvirtausmuotoilu edellyttää kaikkien verkkoon kuuluvien o/d-pareja yhdistävien polkujen luettelemista. Suuremmissa verkoissa, jos o/d-pareja on useita, paisuu luetteleminen niin suureksi ongelmaksi, ettei se ole enää järkevää. Niinpä kyseinen muotoilu ei välttämättä suoraan sovi konelaskentaan. Kuitenkin on polkuihin liittyviä ongelmia ja ohjelmia jotka hyödyntävät muotoilua ja luovat polkuja vain jos niitä tarvitsevat. Vaihtoehtoinen muotoilu ei tarvitse ollenkaan polkujen luettelemista.

3.2 Kaarivirtausmuotoilu

Seuraavassa on lähteenä käytetty teosta [4]. Kaarivirtausmuotoilu ei tutki lainkaan polkuja, vaan muotoilu perustuu kaarien käsittelyyn. Kaarikohtaisesti lasketaan kaarissa virtaavia eri hyödykkeitä, esimerkiksi eri polkujen käyttäjiä, ja päätelmät tehdään sen pohjalta.

Olkoot f_k^j hyödykkeen j virtaus kaaressa $k = 1, \dots, n$ ja $f^j \in \mathbb{R}^n$ ryhmitelty kaarten virtausvektori hyödykkeelle j, jolloin $f^j = (f_1^j, f_2^j, \dots, f_n^j)^T$. Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ solmu-kaari -yhteysmatriisi, jossa

$$A_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ jos kaari } k \text{ suuntautuu ulos solmusta } i, \\ -1, \text{ jos kaari } k \text{ suuntautuu solmuun } i \text{ ja} \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Olkoon lisäksi $b^j \in \mathbb{R}^m$ hyödykkeen j kysyntävektori, jossa

$$b_i^j = \begin{cases} d_j, \text{ jos } i \text{ on hyödykkeen } j \text{ lähdesolmu,} \\ -d_j, \text{ jos } i \text{ on hyödykkeen } j \text{ kohdesolmus ja} \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin

$$\mathbf{A} f^j = b^j, \tag{3.22}$$

eli hyödykkeen j kysyntä saadaan sen virtauksista solmujen väleillä. Olkoon vielä $f \in \mathbb{R}^n$ vektori kaarien kokonaisvirtauksista, kuten kappaleessa 3.1. Tällöin saadaan

$$f = \sum_j f^j = (\sum_j f_1^j, \sum f_2^j, \dots, \sum_j f_n^j), \tag{3.23}$$

eli kunkin kaaren kokonaisvirtaus saadaan luonnollisesti summaamalla eri hyödykkeiden virtaukset. Merkitään jatkossa yhtälöt (3.22) ja (3.23) toteuttavan virtauksen kuuluvan joukkoon $\mathbb{L}$, eli

$$\mathbb{L} = \{f | f \text{ toteuttaa yhtälöt (3.22) ja (3.23) }\}.$$

Kun kustannusfunktio määritellään samoin kuin kappaleessa 3.1, saadaan kaarivirtausmuotoiluun liittyvälle verkon tasapainotuksen variaatioepäyhtälölle muoto:

Etsi f^*, joka kuuluu joukkoon $\mathbb{L}$ ja jolle

$$(c(f^*), f - f^*) \geq 0$$

aina, kun f kuuluu joukkoon $\mathbb{L}$.

Myös monikriteerinen variaatioepäyhtälö muotoutuu polkuvirtausmuotoilun mallia vastaavaksi, mutta f ja f^* kuuluvat kaarivirtausmuotoilussa joukkoon $\mathbb{L}$ joukon $\mathbb{P}$ sijasta.

Esimerkki 2. Tarkastellaan uudelleen esimerkkiä, johon tutustuttiin jo edellisessä kappaleessa. Muodostetaan esimerkistä nyt kaarivirtausmuotoilu. Solmukaari -yhteysmatriisi saa nyt muodon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ja kysyntävektori $b = (2,5; 0; 0; -2,5)^T$. Muotoilun mukaan $Af = b$, josta saadaan neljän yhtälön yhtälöryhmä

$$\begin{cases} f_1 + f_3 + f_4 &= 2,5 \\ -f_1 + f_2 &= 0 \\ -f_4 + f_5 &= 0 \\ -f_2 - f_3 - f_5 &= -2,5. \end{cases}$$

Tästä saadaan vastaavuudet $f_1 = f_2$ ja $f_4 = f_5$, joten jäljelle jää yhtälö $f_1 + f_3 + f_5 = 2,5$. Kun kustannusfunktiot määrtellään samoin kuin esimerkin ensimmäisessä osassa, päädytään samaan juuri samaan ratkaisuun kuin ensimmäisessä muotoilussa.

3.3 Eri muotoilujen ratkaisujoukoista

Yleisessä tapauksessa eri muotoilujen ratkaisut voivat olla vaikka kokonaisuudessaan erilaiset, mutta tietyillä rajoituksilla saadaan eri muotoilut jakamaan samojakin ratkaisuja tai jopa saamaan samat ratkaisut. Oletukset koskevat pääosin kustannusfunktiota $c(f)$. Kappaleessa on käytetty lähteenä teosta [4]. Tulosten päättelyketjut ja puuttuvat todistukset ovat esitettynä kyseisessä teoksessa.

Yksinkertaisimmassa ja tutkituimmassa tapauksessa c on differentioituvan funktion $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ gradientti, eli

$$c_k(f) = \frac{\partial \mathcal{C}(f)}{\partial f_k}$$

aina, kun $k = 1, \ldots, n$. Symmetrisessä tilanteessa c on jatkuvasti differentioituva ja Jacobin matriisi $\nabla c(f)$ on symmetrinen aina, kun $f \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaarivirtausmuotoilusta saadaan minimointingelma

$$\min \mathcal{C}(f), \text{ kun } f \text{ kuuluu joukkoon } \mathbb{L}. \tag{3.24}$$

Vastaavasti separoituvassa tapauksessa, eli kun

$$\mathcal{C}(f) = \sum_{k=i}^{n} \int_0^{x_k} c_k(y)\,\mathrm{d}y,$$

tuottaa polkuvirtausmuotoilu minimointiongelman

$$\min \mathcal{C}(f), \text{ kun } f \text{ kuuluu joukkoon } \mathbb{P}. \tag{3.25}$$

Kun $\mathcal{C}$ on separoituva ja aidosti kasvava sekä c jatkuva, on polkuvirtausmuotoilulla ratkaisu, joka ratkaisee myös kaarivirtausmuotoilun. Polkuvirtausmuotoilulla on vain yksi ratkaisu, jos $\mathcal{C}$ on aidosti konveksi ja c aidosti monotooninen. Funktion $\mathcal{C}$ ei siis tarvitse olla separoituva, jotta muotoilulla olisi vain yksi ratkaisu. Kustannusfunktio c on välttämättä aidosti monotooninen, jos $\mathcal{C}$ on aidosti konveksi.

Kun syklin kustannukset ovat positiiviset ja hyödykkeiden virtausta suunnatussa syklissä vähennetään, pienenee myös funktion $\mathcal{C}$ arvo. Tällöin, jos kaikilla suunnatuilla sykleillä kustannukset ovat positiiviset, ei optimaalinen ratkaisu ongelmaan (3.24) voi sisältää positiivista hyödykkeiden virtausta kaikkiin kaariin. Jos kaikkiin kaariin menisi positiivinen virtaus, voitaisiin virtausta vähentää ja saataisiin funktiolle $\mathcal{C}$ minimiä pienempi arvo, jolloin päädyttäisiin ristiriitaan. Näistä seikoista seuraa, että jos $\mathcal{C}$ on konveksi ja haittojen c_k summa on positiivinen kaikille verkon suunnatuille sykleille, on optimointiongelmien (3.24) ja (3.25) ratkaisut samat. Näin on, koska tällöin yhtälöistä (3.16) ja (3.22) ja yhtälöistä (3.17) ja (3.23) tulee toisiaan vastaavat, jolloin $\mathbb{P} = \mathbb{L}$.

Määritellään seuraavassa joitain sanontatapoja. Kaikille ei-negatiivisille virtauksille $f \in \mathbb{R}^n$ sanomme, että f *käyttää kaarta* k jos $f_k > 0$ ja että f *käyttää sykliä*, jos se käyttää syklin kaikkia kaaria. Virtauksille $f \in \mathbb{L}$ sanomme, että f on *heikosti syklitön (weakly acyclic)*, jos jollekin $f \in \mathbb{L}$ yksikään f^j ei käytä kaikkia syklin kaaria. Vastaavasti f on *vahvasti syklitön (strongly acyclic)*, jos kaikille $f \in \mathbb{L}$ yksikään f^j ei käytä kaikkia syklin kaaria. Jos f on vahvasti syklitön, on se tietenkin myös heikosti syklitön. Lisäksi vielä pätee, että jos f on heikosti syklitön, se kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$. Tällöin ovat voimassa sisältyvyydet

$$\{f \in \mathbb{L} | f \text{ on vahvasti syklitön}\} \subseteq \{f \in \mathbb{L} | f \text{ on heikosti syklitön}\} \subseteq \mathbb{P} \subseteq \mathbb{L}.$$

Todistetaan väite, että jos $f \in \mathbb{L}$ on heikosti syklitön, silloin se kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$. Koska nyt f on heikosti syklinen, on olemassa virtausvektori f^j

hyödykkeelle j, joka toteuttaa joukon $\mathbb{L}$ vaatimukset ja jonka käyttämät kaaret eivät muodosta sykliä millään hyödykkeellä j. Virtausvektori f^j voidaan jakaa hyödykkeeseen j liittyvien polkujen virtausten summaksi, joskaan ei välttämättä yksikäsitteisesti. Voidaan siis kirjoittaa

$$f^j = \mathbf{P}^j x^j,$$

missä $\mathbf{P}^j$ on hyödykkeeseen j liittyvä kaari-polku -yhteysmatriisi ja hyödykkeen j polkujen virtausvektori $x^j \geq 0$. Polkujen virtausvektorille pätee

$$\sum_{h \in \mathcal{P}} x_h^j = d_j,$$

eli hyödykkeen j tarve on sama kuin summa vektorin x^j alkioista. Tällöin

$$f = \sum_j f^j = \mathbf{P}x,$$

eli f toteuttaa myös joukon $\mathbb{P}$ oletukset joten f kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$. $\square$

Kustannusfunktion c sanotaan olevan *syklin suuntaan ei-negatiivinen (cycle-wise nonnegative)* joukossa $\mathbb{L}$, jos kaikille $f \in \mathbb{L}$ on $\sum c_k(f) \geq 0$, kun summataan yli kaikkien verkon suunnattujen syklien. Kustannusfunktio c on *syklin suuntaan positiivinen (cycle-wise positive)*, jos vastaavasti $\sum c_k(f) > 0$.

Esitetään ja todistetaan seuraavassa kaksi eri muotoilujen ratkaisujoukkojen yhteyksiin liittyvää lausetta

Lause 3.2. *Jos c on syklin suuntaan ei-negatiivinen joukossa $\mathbb{L}$, niin kaikki polkuvirtausmuotoilun ratkaisut ratkaisevat myös kaarivirtausmuotoilun.*

Todistus. Olkoon c syklin suuntaan ei-negatiivinen joukossa $\mathbb{L}$ ja oletetaan, että f ratkaisee polkuvirtausmuotoilun. Olkoon y mikä tahansa joukkoon $\mathbb{L}$ kuuluva virtausvektori, jolle suoritetaan vahvasti syklitön jako $y := \hat{y} + \bar{y}$, missä sekä $\hat{y}$, että $\bar{y}$ ovat ei-negatiivisia. Jaon sanotaan olevan vahvasti syklitön, jos $\bar{y}$ on jaossa vahvasti syklitön. Nyt

$$\begin{aligned} c(f) \cdot (y - f) &= c(f) \cdot (\hat{y} + \bar{y} - f) \\ &= c(f) \cdot \hat{y} + c(f) \cdot (\bar{y} - f) \\ &\geq c(f) \cdot (\bar{y} - f). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Tämä pätee, sillä tulo $c(f) \cdot \hat{y} \geq 0$, koska molemmat tekijät ovat ei-negatiivisia. Suoraan oletuksen mukaan $\hat{y} \geq 0$ ja $c(f) \geq 0$, koska c oli oletuksen mukaan syklin suuntaan ei-negatiivinen. Koska jako oletettiin vahvasti syklittömäksi, on $\bar{y}$ vahvasti syklitön, joten joukkojen sisältyvyyksien perusteella $\bar{y}$ kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$. Siis $\bar{y}$ ja f ovat joukon $\mathbb{P}$ jäseniä ja f ratkaisee polkuvirtausmuotoilun, joten

$$c(f) \cdot (\bar{y} - f) \geq 0.$$

Siispä yhtälön (3.26) perusteella myös

$$c(f) \cdot (y - f) \geq 0 \tag{3.27}$$

aina, kun y on joukon $\mathbb{L}$ jäsen. Koska $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{L}$ ja $f \in \mathbb{P}$, kuuluu f myös joukkoon $\mathbb{L}$, joten f ratkaisee kaarivirtausmuotoilun. □

Lause 3.3. *Kaikki heikosti syklittömät kaarivirtausmuotoilun ratkaisut ovat myös polkuvirtausmuotoilun ratkaisuja.*

Todistus. Olkoon f heikosti syklitön ratkaisu kaarivirtausmuotoilulle. Tällöin joukkojen sisältyvyyksien perusteella f kuuluu joukkoon $\mathbb{P}$. Valitaan mielivaltainen vektori $y \in \mathbb{P}$, joka kuuluu myös joukkoon $\mathbb{L}$. Tällöin pätee yhtälö (3.27), joka on kummankin muotoilun ratkaisu vektoreiden y ja f kuuluessa molempiin ratkaisujoukkoihin. □

Eri muotoilujen ratkaisujoukoille voidaan esittää sisältyvyydet samaan tapaan kuin aiemmin esitettiin muotoilujen mahdollisille joukoille. Merkitään ratkaisujoukkoja

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^* &= \{f \in \mathbb{P} | \text{f ratkaisee polkuvirtausmuotoilun}\} \\
\mathbb{L}^* &= \{f \in \mathbb{L} | \text{f ratkaisee kaarivirtausmuotoilun}\} \\
\mathbb{L}^*_W &= \{f \in \mathbb{L}^* | \text{f on heikosti syklitön}\} \\
\mathbb{L}^*_S &= \{f \in \mathbb{L}^* | \text{f on vahvasti syklitön}\}
\end{aligned}$$

Jos c on syklin suuntaan ei-negatiivinen joukossa $\mathbb{L}$, niin lauseiden 3.2 ja 3.3 sekä määritelmien seurauksena saadaan sisältyvyydet

$$\mathbb{L}^*_S \subseteq \mathbb{L}^*_W \subseteq \mathbb{P}^* \subseteq \mathbb{L}^*.$$

Joukkojen sisältyvyyksistä voitaisiin todistaa myös seuraava tulos (ks. teos [4], Theorem 3.3):

Jos c on syklin suuntaan positiivinen joukossa $\mathbb{L}$, niin kaikki kaarivirtausmuotoilun ratkaisut ovat vahvasti syklittömiä.

Toisinsanoen, kun c on syklin suuntaan positiivinen, niin $\mathbb{L}^* \subseteq \mathbb{L}^*_S$. Kun yhdistetään edellinen tulos ratkaisujoukkojen sisältyvyyksiin, saadaan, että $\mathbb{L}^* \subseteq \mathbb{L}^*_S$ ja $\mathbb{L}^*_S \subseteq \mathbb{L}^*$, joten muotoiluilla on samat ratkaisut kunhan c on syklin suuntaan positiivinen joukossa $\mathbb{L}$.

4. Ad hoc -radioverkoista

Tässä luvussa tutustutaan aluksi ad hoc -radioverkkojen käyttömahdollisuuksiin ja yleiseen reititykseen. Luvun loppupuolella tutustutaan seikkaperäisesti AODV-reititysprotokollaan. Lähteinä on käytetty teoksia [8, 9, 11].

Ad hoc -verkot ovat liikkuvia langattomia radioverkkoja, joilla ei ole solmujen yläpuolista rakennetta, esimerkiksi kiinteitä tukiasemia. Jokainen verkossa oleva laite on verkon solmu. Jokainen solmu voi muodostaa suoran yhteyden kantama-alueellaan oleviin solmuihin. Solmut voivat toimia myös reitittiminä ja välittää viestejä muiden solmujen välillä. Jos reitillä on myös muita kuin lähde- ja kohdesolmut, puhutaan monen hypyn (*multihop*) verkosta. Solmut siis kykenevät muodostamaan verkon itsenäisesti ja pitämään sitä yllä vaikka solmut liikkuvatkin, eikä samat yhteydet välttämättä pysy toiminnassa.

Nykypäivän langattomat laitteet, kuten matkapuhelimet ja kannettavat tietokoneet ovat riippuvaisia tukiasemista. Ad hoc -verkoilla näin ei ole, joten verkko saadaan nopeasti toimintakuntoon tilanteissa, joissa kiinteää tukiverkkoa ei ole saatavilla. Tukiverkon rakentaminen on myös kallis toimenpide, joka ehkä joissain tilanteissa voidaan välttää ad hoc -verkon käytöllä. Ad hoc -verkot ovat siis paitsi joustavia ympäristönsä suhteen, myös edullisia verkkoja.

Kuva 4.1: Langaton matkapuhelinverkko ja ad hoc -verkko

Ad hoc -verkkojen kehitys on lähtenyt liikkeelle armeijan tarpeista. Taistelukentillä sotilaiden täytyy pystyä liikkumaan vapaasti, mutta yhteyden joukkojen välillä tulisi silti säilyä. Lisäksi armeija ei voi luottaa siihen, että kiinteä tukiverkko on käytettävissä, sillä kaikkialla ei kiinteää verkkoa ole ja toisaalta se saattaa olla tuhoutunut. Kun vielä fysiikan rajoituksista seuraa, että kahden laitteen välinen yhteys saattaa katketa näköalueen ulkopuolella, on monihyppyiseen reititykseen kykenevä ja itse itsensä rakentava ad hoc -verkko hyvä väline armeijalle. Varsinkin ad hoc -verkon alkuaikoina Yhdysvaltojen puolustusvoimien panos verkon kehittämiseen on ollut merkittävä.

Muut nykyään ajateltavissa olevat sovellutukset liittyvät lähinnä paikallisiin ja ehkä myös väliaikaisiin verkkoihin. Jos esimerkiksi kokous järjestetään normaalin toimistoympäristön ulkopuolella niin, että mukana on kannettavia tietokoneita, tuo ad hoc -verkko mahdollisuuden koneiden yhdistämiseen ilman kiinteää verkkoa.

Katastrofialueilla taas ei yleensä ole mitään mahdollisuutta tukiasemien pystyttämiseen ja kiinteiden yhteyksien muodostamiseen jo kustannus- ja aikataulusyistä, jolloin nopeasti syntyvä ja edullinen ad hoc -radioverkko on kätevä ratkaisu auttajien keskinäiseen kommunikointiin.

Liikkumaton ad hoc -sovellus voisi olla ympäristönsä tilasta tietoja antava anturiverkko. Esimerkiksi saastuneelle alueelle voitaisiin sijoittaa laitteita, jotka itsenäisesti paitsi muodostavat verkon, myös mittaisivat tietoja ympäristöstään ja lähettäisivät ne eteenpäin säännöllisin väliajoin.

Pidempiaikainen sovellus voisi olla jonkin rakennuksen sisäinen verkko. Laajemman alueen yhteyksien muodostamisessa jouduttaneen tulevaisuudessakin käyttämään avuksi kiinteää runkoverkkoa ad hoc -verkkojen välittäessä viestejä vain paikallisesti. Nykytutkimus ja tulevaisuuden kuvat liittävätkin paikalliset ad hoc -verkot muihin verkkoihin, kuten internetiin. Tätä varten kaikki ad hoc -verkkoja käyttävät protokollat täytyy saada yhteensopiviksi muiden verkkojen protokollien kanssa.

Tulevaisuudessa sovellutukset leviävät nykyistä enemmän kaupallisiin sovellutuksiin, muunmuassa multimediaan. Tällöin myös verkolta vaaditaan tämän hetkistä tasoa parempaa laatua esimerkiksi yhteyden pysyvyydessä.

4.1 Reitityksestä ad hoc -verkoissa

Reitityksen voidaan ajatella koostuvan reitin etsinnästä ja reitin ylläpitämisestä. Etenkin nopeasti muotoaan muuttavissa verkoissa tehokas reititys on sellainen ongelma, jota vanhat kiinteisiin verkkoihin tarkoitetut reititysprotokollat eivät välttämättä pysty ratkaisemaan. Niinpä on kehitetty uusia protokollia, jotka soveltuisivat paremmin myös liikkuviin verkkoihin. Toimintatavan mukaan ad hoc -verkkojen reititysprotokollat jaetaan kahteen osaan, taulukko- ja vaatimusohjattuihin protokolliin.

Taulukko-ohjatut protokollat pyrkivät ylläpitämään valmiita reittitietoja taulukoituna jokaisesta verkon solmusta kaikkiin muihin solmuihin. Näin saadaan teoriassa vasteaikaa lyhyemmäksi, kun reittiä ei tarvitse etsiä ennen lähetystä, mutta ongelmiltakaan ei vältytä. Jos verkon solmut ovat nopeasti liikkuvia, joudutaan reittitietoja päivittämään usein. Tällöin, varsinkin jos verkon liikenne on vähäistä, on päivitysten jatkuva lähettäminen suurimmalta osalta turhaa verkon kuormittamista ja virran kuluttamista. Jos verkko ei edes pysy ajantasalla, joudutaan reitti kuitenkin etsimään uudelleen ja tällöin vasteaika kasvaa vieläkin suuremmaksi. Vasteaika kasvaa enemmän, koska ensin on yritetty suorittaa lähetys olemassaolevaa reittiä pitkin, jolloin reitin etsinnän aloitus siirtyy eteenpäin.

Vaatimusohjatut protokollat ovat tietoisia korkeintaan naapurisolmujen sijainneista. Reitit kauempiin solmuihin muodostetaan vasta silloin, kun niitä oikeasti tarvitaan. Reittejä ei myöskään ylläpidetä tarvittavaa aikaa kauempaa. Taulukko-ohjattuihin protokolliin verrattuna muistia ja kontrolliliikennettä, eli reittien päivitystä ja solmujen paikkojen tarkastelua, tarvitaan vähemmän, mutta ainakin teoriatasolla vasteajat pitenevät. Tarkemman tarkastelun kohteena luvussa 4.2 on vaatimusohjattu AODV (*Ad Hoc on-demand Distans Vector*) protokolla. AODV -protokolla on laajimmin tutkittu ja käytetty protokolla. Se on useiden muiden protokollien pohjana.

Lisäksi on vielä niinsanottuja hybridiprotokollia, jotka ovat edellisten välimuotoja. Ne yhdistävät molempien piirteitä ja ovat mahdollisesti säädeltävissä jompaan kumpaan suuntaan parametrien avulla tarpeen mukaan.

Jos protokollat jaetaan toimintatarkoituksen mukaan, voidaan erotella protokollat, joilla lähetetään viesti yhdelle muulle solmulle (*unicasting*) ja toisaalta sellaiset protokollat, joilla lähetys suunnataan samalla kertaa useille solmuille (*multicasting*), muttei kuitenkaan välttämättä kaikille. Tällöin puhutaan ryhmälähetysprotokollasta. AODV on unicast-protokolla, mutta siihen voidaan liittää myös ryhmälähetyksiin kykenevä osa.

4.2 AODV reititysprotokolla

AODV-protokolla on kehitetty nimenomaan ad hoc -verkkoja ajatellen. Sen pohjana on ollut DSDV (*Destination-Sequenced Distance-Vector*) reititysalgoritmi. DSDV on kuitenkin taulukko-ohjattu ja AODV vaatimusohjattu algoritmi, joten eroavaisuuksia on. DSDV-algoritmi käynnistää koko verkon laajuisen lähetyksen jokaisesta paikallisesta muutoksesta, koska jokaisella solmulla täytyy olla tieto muiden solmujen sijainneista. AODV ei enää tarvitse säännöllisiä lähetyksiä, koska siinä solmut ovat tietoisia vain naapurisolmujen sijainneista ja reitistäkin vain seuraavan hypyn verran. Verkon laajuisten lähetysten sijaan AODV-protokolla pitää kirjaa solmua reititykseen käyttäneistä naapurisolmuista, joille välitetään tieto linkin katkeamisesta. Muut solmut eivät tietoa tarvitse ja jos käytetyt reitit ovat jo vanhentuneet, ei tietoa tarvitse lähettää ollenkaan.

4.2.1 Reitinetsintä

Kun solmu tarvitsee reittiä johonkin toiseen solmuun, tarkistaa se aluksi onko reitti jo olemassa. Jos reitti on olemassa, toimittaa solmu viestin seuraavaan solmuun kohti kohdesolmua. Jos solmu ei valmiiksi tunne reittiä tai tunnettu reitti on vanhentunut, käynnistää se reitinetsinnän *reittipyynnöllä* (*route request, RREQ*). Reitinpyyntöviesti sisältää lähettäjän osoitteen ja järjestysnumeron, lähetyksen tunnistenumeron, kohteen osoitteen ja viimeisimmän tunnetun järjestysnumeron kohteelle sekä hyppylaskurin ja kolme lippua. Yksi lipuista osoittaa haluttavan kaksisuuntaista reittiä ja muita tarvitaan monilähetyksiin. Viimeisin tunnettu kohteen järjestysnumero otetaan joko vanhentuneesta reittitiedosta tai asetetaan nollaksi jos aiempaa tietoa ei ole lainkaan olemassa. Jokaisella solmulla on lähetysten tunnistenumero, jota kasvatetaan aina kun solmu lähettää reittipyynnön. Jokaisella solmun lähetyksellä on siten eri tunnistenumero. Lähdesolmun osoite ja lähetyksen tunnistenumero antavat siis jokaiselle reittipyynnölle yksilöllisen tunnisteen. Näiden tietojen avulla saadaan reitistä lenkitön, sillä sama solmu ei käsittele samaa pyyntöä kahdesti. Lähdesolmun järjestysnumero puolestaan kasvaa aina, kun solmu saa uutta tietoa naapurisolmuistaan. Kohteen järjestysnumero kertoo, kuinka tuoretta tietoa kohteesta vähintään täytyy olla, jotta se olisi hyödyllistä reittipyynnön lähettäjälle. Solmu, jolla on annettua kohteen järjestysnumeroa tuoreemmalla tai samalla järjestysnumerolla oleva tieto, voi lähettää sen lähteelle. Reittipyynnön lähettämisen jälkeen asetetaan odotusaika.

Jos määrätyssä ajassa ei saada yhtään reittivastausta, lähetetään reittipyyntö uudelleen. Tätä jatketaan kunnes joko reittivastaus saadaan tai aikaraja pyynnön uudelleenlähettämiseen umpeutuu. Kun raja ylitetään, lähettää solmu datan takaisin yläpuolellaan oleville solmuille, jos on sen sieltä eteenpäin toimittamista varten saanut, merkiksi lähettämisen mahdottomuudesta.

Reittipyyntö kulkee verkossa käyttäen *laajentavaa kehäetsintää (expanding ring search)*. Proseduurissa määrätään rajat reittipyynnön lähettämiselle niin, ettei koko verkko välttämättä ole mukana reitinetsinnässä. Pyyntö lähetetään ensin vain lähisolmuille ja aluetta laajennetaan vähitellen jos reittiä ei löydy lähisolmujen tiedoilla. Kuvassa 4.2 kohdesolmu e löytyi etäisyydeltä 3. Jonkin ennaltamäärätyn ajan jälkeen, jos reittiä ei ole löytynyt, lähetetään pyyntö koko verkkoon. Kun reitti löytyy, talletetaan etäisyys reittitaulukkoon. Jos haku täytyy uusia reitin vanhentumisen jälkeen, voidaan etäisyyttä käyttää hyväksi. Uuden haun ensimmäisellä kierroksella voidaan haku joko kohdistaa alueelle missä kohdesolmu on viimeksi havaittu tai laajentaa aluetta liikkumisnopeuden perusteella alueksi, missä solmu todennäköisesti sijaitsee. Näin mitä ilmeisimmin päästään nopeammin oikealle alueella.

Kuva 4.2: Reittipyynnön liikkuminen

Kun välisolmu saa reittipyynnön, se tarkistaa ensiksi onko käsitellyt pyyntöä aiemmin. Solmu vertaa pyynnön lähettäjän osoitetta ja pyynnön tunnistenumeroa aiemmin käsittelemiensä pyyntöjen vastaaviin tietoihin. Jos pyyntö on jo käsitelty ja edelleenlähetetty, tuhotaan uusi pyyntö. Muulloin solmu etsii reititystaulukostaan pyyntöön sopivaa reittiä. Jos reitti kohdesolmuun löytyy, verrataan järjestysnumeroita. Kohteen järjestysnumeron ollessa taulukossa suurempi tai yhtäsuuri verrattaessa pyynnössä olevaan numeroon, voi solmu lähettää *reittivastauksen* (*route reply, RREP*) takaisin lähdesolmulle. Jos järjestysnumero on taulukossa pienempi tai sitä ei ole, solmu edelleenlähettää reittipyynnön.

Kuva 4.3: Reittivastauksen liikkuminen

Jokaisen reittipyyntöä edelleenlähettävän solmun täytyy säilyttää tulleen pyynnön reittitieto takaisin lähdesolmuun (*reverse route*) reititystaulukossaan. Solmut, jotka eivät lopulta kuitenkaan ole reitillä, säilyttävät tietoja jonkin ennalta määrätyn ajan, jonka jälkeen solmu tuhoaa tiedot. Paluureittiä tarvitaan mahdollisen reittivastauksen lähettämiseen lähdesolmulle. Paluureittitietoihin kuuluvat lähdesolmun osoite ja järjestysnumero, hyppyjen lukumäärä mentäessä lähdesolmuun ja osoite sille naapurille, keneltä reittipyyntö alunperin tuli.

Jos lähdesolmu haluaa kaksisuuntaisen viestiväylän, jotta myös kohdesolmu voi lähettää tietoa lähdesolmulle, asettaa se reittipyyntöön lipun tiedottamaan välisolmuja. Siinä tapauksessa pyyntöön vastaava solmu lähettää lähdesolmulle menevän reittivastauksen lisäksi *tarpeettoman reittivastauksen* kohdesolmulle. Tämä ylimääräinen reittivastaus luo vastapolun kohteelta lähdesolmulle.

Mikäli reittipyyntö saavuttaa kohteen, lähettää solmu reittivastauksen lähteelle. Viesti koostuu kohteen osoitteesta ja senhetkisestä järjestysnumerosta, lähdesolmun osoitteesta, reitin elinajasta, hyppylaskurista ja lipusta. Jos reittivastauksen lähettää jokin välisolmuista, on kohteen järjestysnumerona viimeisin solmun tiedossa oleva järjestysnumero. Välisolmulla reitin elinajasta on osa jo kulunut, joten reitti ei mitä todennäköisimmin ole yhtä pitkäikäinen kuin kohdesolmun lähettämä reitti. Kohdesolmu asettaa hyppylaskurin nollaksi, mutta välisolmu kopioi etäisyyden vastaukseen reittitaulukostaan. Lippua tarvitaan, jos halutaan reittivastauksen vastaanottajan lähettävän *reittivastausvahvistuksen*. Näin voidaan toimia, jos reitillä on epäluotettava linkkiväli tai epäillään jotain väliä yksisuuntaiseksi.

Kun välisolmu vastaanottaa reittivastausviestin, se kirjaa kohteeseen etenevän polun (*forward path*) reittitaulukkoonsa. Polku sisältää osoitteet kohdesolmuun ja siihen naapurisolmuun jolta viesti tuli. Lisäksi viestiin kuuluvat hyppylaskuri ja reitin koko ajan vähenevä elinaika. Solmu lisää laskurin lukemaa yhdellä, jolloin se saa etäisyyden kohteeseen. Aina, kun reittiä käytetään, sen käyttöön yhdistettyä elinaikaa päivitetään. Jos reittiä ei käytetä jonkin tietyn ajan kuluessa, se tuhotaan. Kun solmu on saanut viestistä tarvitsemansa tiedot, se lähettää reittivastauksen edelleen kohti lähdesolmua.

On todennäköistä, että solmu saa useita reittivastauksia eri naapurisolmuiltaan. Tällöin se lähettää edelleen ensimmäisenä saamansa vastauksen. Myöhempään vastaanottamiaan se lähettää edelleen vain, jos uudessa vastauksessa kohteen järjestysnumero on suurempi tai hyppyjen määrä pienempi kuin ensimmäisessä viestissä. Muut toistot tuhotaan. Tämä menettely vähentää turhien vaihtoehtoisten toistensa kaltaisten reittien lähettelyä verkossa. Lähdesolmu voi aloittaa lähetykset välittömästi saatuaan ensimäisen reittivastauksen. Lähtösolmu voi kuitenkin muuttaa reittiä myöhemmin jos saa tuoreemman tai paremman reitin tietoonsa.

Protokolla siis käyttää reitteihin vain kaksisuuntaisia kaaria. Protokollassa on myös mekanismi välttää tilanteita, joissa kohdetta ei saavuteta yksisuuntaisten kaarten takia, vaikka reitti oikeasti olisikin olemassa. Tällainen tilanne voi muodostua jos kohteeseen on useita reittejä, joista ainakin jossakin on ainakin yksi yksisuuntainen kaari ja lisäksi tämä reitti on nopein. Tällöin solmu lähettää eteenpäin yksisuuntaista kaarta pitkin tulleen reittipyynnön. Kun pyyntö tulee solmuun uudelleen kaksisuuntaista reittiä pitkin, se jätetään huomioimatta vanhana jo käsiteltynä pyyntönä. Reittivastaus ei kuitenkaan pääse läpi samaa reittiä, joten se ei pääse lähdesolmuun ollenkaan. Tietyn ajan kuluttua reittipyyntö lähetetään uudelleen ja ongelma toistuu, jos yksisuuntaisen kaaren reitti on yhä nopein. Lopulta voidaan luulla, että reittiä ei ole. Kuvassa 4.4 solmu d saa reittipyynnön ensin solmulta b yksisuuntaista kaarta pitkin, jolloin solmun c pyyntö tuhotaan, eikä reittivastaus pääse takaisin solmuun a.

Kuva 4.4: Yksisuuntaisen kaaren ongelma

Reittivastausvahvistus on keino estää ongelma. Kun solmu välittää reittivastausta eteenpäin saamatta vahvistusta, asettaa solmu vastaamattoman solmun *mustalle listalle*. Kyseisen listan solmuilta tulleita reittipyyntöjä ei huomioida ja ongelma poistuu. Listalle laitettu solmu pysyy listalla jonkin tietyn ennalta määrätyn ajan, jonka jälkeen tilanne tarkistetaan tarvittaessa uudelleen.

4.2.2 Reitin ylläpitäminen

Kun reitti on löydetty, ylläpidetään sitä niin kauan kuin lähtösolmu sitä tarvitsee. Ylläpidettäviä reittejä kutsutaan *aktiivisiksi reiteiksi*. Solmun liikkuminen verkossa vaikuttaa vain niihin reitteihin, joilla solmu on, eikä aktiivisten reittien ulkopuolisten solmujen liikkeet aiheuta mitään toimenpiteitä. Jos lähdesolmu itse liikkuu, se voi käynnistää reittihaun kohdesolmuun uudelleen. Reitin välisolmun tai kohdesolmun liikkuessa tilanteen muutoksen huomaa yleensä jokin muu solmu.

Jos solmu havaitsee toimimattoman kaaren tai on vastaanottanut datapaketin lähetettäväksi tuntemattomaan tai mitätöityyn määränpäähän, se lähettää *reittivirheviestin* (*route error, RERR*). Reitti voi olla mitätöity taulukossa, jos se on joko poikki tai vanhentunut. Näissä tapauksissa kohteen järjestysnumeroa taulukossa lasketaan yhdellä, hyppyjen lukumäärä asetetaan äärettömäksi ja reitin elinaika asetetaan *poistamisjaksolle*. Kun poistamisjakso on kulunut, reitille meno hylätään, jos kohteeseen ei ole tuona aikana tullut reittipyyntöjä tai -vastauksia. Jos naapurisolmu on mitätöity, eli esimerkiksi liikkunut ulos keskinäiseltä kuuluvuusalueelta, poistetaan se myös muilta reititystaulukon reiteiltä.

Solmu voi myös yrittää korjata reittiä paikallisesti, jos se havaitsee toimimattoman linkin. Jos korjaaminen onnistuu, ei virheviestiä välttämättä tarvita. Jos solmu ei yritä korjausta, se mitätöi reitin ja lähettää virheviestin. Virheviesti sisältää saavuttamattomien kohteiden osoitteet ja järjestysnumerot, saavuttamattomien solmujen lukumäärän ja lipun, joka on *no-delete*-asennossa, jos reitti toimii ja poissa käytöstä, jos reitti ei toimi, kuten tässä tilanteessa.

Paikallinen reitinkorjaus voidaan tehdä, jos etäisyys solmun ja kohteen välillä on ennalta määrättyä raja-arvoa pienempi. Tällöin solmu mitätöi vanhan reitin kohteeseen ja käynnistää reitinetsinnän reittipyynnöllä. Jos solmu ei saa reittivastausta, se lähettää virheviestin alkuperäiselle lähdesolmulle. Jos reitinkorjauksen aloittanut solmu saa reittivastauksen, se sijoittaa uuden reitin taulukkoon. Jos uusi reitti on entistä pidempi voidaan virheviesti lähettää *no-delete*-lipun kanssa. Viesti kertoo, että reitti toimii, mutta on aiempaa pidempi. Välisolmut eivät tuhoa reittiä viestin saadessaan, mutta lähettävät viestin kuitenkin eteenpäin. Lähdesolmu voi joko käyttää vanhaa korjattua reittiä tai käynnistää uuden reittihaun. Onnistuneen reitinkorjauksen jälkeen verkon toiminta voi jatkua normaalisti. Kuvassa 4.5 reitin korjaustarve syntyy solmun c liikkuessa pois solmun b kuuluvuusalueelta, jolloin reiti katkeaa (1 ja 2). Solmu b lähettää reittipyynnön, johon saa vastauksen kohdesolmulta e (3). Reittivastauksen liikkuessa välisolmut muodostavat uuden reitin (4). Koska uusi reitti on pidempi kuin entinen, lähettää solmu b lopuksi reittivirheviestin alkuperäiselle lähdesolmulle a (5).

Kuva 4.5: Paikallinen reitinkorjaus

Jos useat kohdesolmut tulevat tavoittamattomiksi, korjataan välittömästi reitti vain siihen kohdesolmuun, jolle halutaan tietoa toimittaa. Muut merkitään mahdollisiksi korjata paikallisesti ja korjataan tarpeen ilmentyessä, eli vain tarvittavat reitit korjataan vaatimusohjattavan protokollan periaatteen mukaisesti. Käyttämättömiä reittejä ei säilytetä kovin pitkään, koska on hyvin todennäköistä, että reitit menevät käyttökelvottomiksi, kun jatkuvaa korjausta ei suoriteta.

Kun solmu saa ilman no-delete -lippua olevan virheviestin toiselta solmulta, joka on välisolmu mentäessä kohdesolmuun, se mitätöi reititystaulukosta menon saavuttamattomiin kohdesolmuihin. Jos solmulla on edeltäjiä, eli se ei ole lähdesolmu, se myös edelleenlähettää virheviestin.

Yleensä solmut poimivat välittämistään lähetyksistä tiedot naapureistaan. Minkä tahansa viestin saadessaan se päivittää viestiä lähettävän naapurin elinajan reittitaulukkoon. Jos naapuria ei ennalta ollut taulukossa lainkaan, solmu lisää taulukkoonsa uuden naapurisolmun. Jos solmulla ei ole muuta tapaa kertoa itsestään siirtymisen jälkeisille uusille naapureilleen ja toisaalta säilyttää naapureiden tietämys omasta olemassaolostaan, se käyttää tervehdys (*hello*) viestejä. Näitä viestejä lähetellään, jos muita lähetyksiä ei ole ollut jonkin tietyn tervehdysjaksoksi kutsutun ajan kuluessa. Tervehdysviestit ovat reittivastauksia, joissa kohdesolmun osoitteena on oma osoite ja samoin järjestysnumerona lähettävän solmun oma järjestysnumero. Naapurisolmut eivät lähetä tervehdysviestejä eteenpäin. Jos joltain naapurilta ei ole tullut tervehdysviestiä tai muita lähetyksiä tervehdysjakson kuluessa, olettaa solmu verkon paikallisen topologian muuttuneen. Solmu poistaa hiljaisen naapurin reittitaulukosta luullen sen siirtyneen pois omalta kantama-alueeltaan.

4.2.3 Ryhmälähetyksistä

Ryhmälähetysten reitinetsintä hyödyntää samoja viestityyppejä, reittipyyntöjä ja -vastauksia, kuin yhdellekin solmulle tehtävien lähetysten reitinetsintä. Ryhmät ovat dynaamisia, sillä niihin voi liittyä ja niistä erota milloin vain. Kun solmu liittyy ryhmään, luodaan kaksisuuntainen ryhmälähetyspuu ryhmän jäsenistä ja niitä yhdistävistä muista verkon solmuista. Jokaisella ryhmällä on ryhmänjohtaja, jonka kuuluu pitää yllä ryhmän järjestysnumeroa. Johtaja on yleensä suhteellisen pysyvä ryhmän jäsen.

Reitinetsintä

Reitinetsintä alkaa, kun solmu haluaa joko liittyä ryhmään tai lähettää ryhmälle viestin ulkopuolisena solmuna eikä tiedä reittiä. Tämä lähdesolmu luo reittipyynnön ryhmän osoitteella ja viimeisellä tietämällään järjestysnumerolla. Reittipyynnössä kerrotaan *liittymislipulla*, jos solmu tahtoo ryhmän jäseneksi. Pyyntö lähetetään naapurisolmujen kautta eteenpäin (Kuva 4.6 (a)).

Liittymisviestiin voivat vastata vain ryhmälähetyspuun jäsenet, mutta muihin viesteihin mikä tahansa tarvittavan tiedon hallitseva solmu. Jos puuhun kuulumaton solmu vastaanottaa liittymispyynnön tai ei tiedä reittiä ryhmään, se muodostaa paluureitin lähdesolmuun ja edelleenlähettää pyynnön naapurisolmuilleen.

Solmun vastaanottaessa liittymispyynnön se voi vastata siihen, jos on puun reitittäjä ja jos järjestysnumero on vähintään sama kuin pyynnössä. Pyynnön vastaanottanut jäsensolmu lisää ryhmälähetysten reittitaulukkoon aktivoimattoman pääsyn lähdesolmuun. Ryhmälähetysten reittitaulukossa on jokaiselle seuraavan hypyn solmulle kohti ryhmän reunoja aktivointilippu. Jos lipun arvo on epätosi, ei aktivointia ole suoritettu, eikä solmu välitä ryhmälähetyksiä sille polulle. Reittiä voidaan käyttää lähetysten välittämiseen vasta, kun se on aktivoitu. Aktivoimattoman pääsyn lisäämisen jälkeen solmu luo ja lähettää reittivastauksen. Reittivastausta välittävä solmu matkalla kohdesolmuun kirjaa etenevän reitin kohti ryhmää asettamalla solmun, jolta vastauksen sai, seuraavaksi hypyksi. Lisäksi solmu kasvattaa hyppylaskuria ja välittää viestin seuraavalle solmulle kohti reittipyynnön lähdesolmua.

Lähdesolmu odottaa vastausta etsintäjakson ajan (Kuva 4.6 (b)). Jos vastausta ei tule, se uudelleenlähettää pyynnön kuten perusmallissa. Jos solmu ei lopultakaan saa yhtään vastausta, se olettaa, että yhtään ryhmän jäsentä ei ole verkon saavutettavalla alueella. Jos solmu oli liittymässä ryhmään, siitä tulee ryhmän johtaja.

Reitin aktivointi ja purku

Lähdesolmun täytyy odottaa reitinetsintäaika ennenkuin se voi käyttää reittiä. Jos pyyntö oli ryhmään liittymiseen, voi sen mahdollisesti tehdä eri oksiin ja valinta tehdään vasta ajan umpeuduttua, jolloin saadaan käyttöön paras reitti. Ryhmäviesteihin voidaan käyttää vain yhtä reittiä, koska muutoin syntyy paljon turhaa liikennettä ja viesti menee kaikille ryhmän solmuille useaan kertaan. *Ryhmälähetysten aktivointiviestin* (*multicast activation*, MACT) lähetetään sille suurimman järjestysnumeron reitille, jolla on pienin hyppymäärä. Viestin kulkiessa vastauksen lähettäjälle aktivoituu reitti tullen käyttökuntoiseksi (Kuva 4.6 (c)).

Kuva 4.6: Ryhmälähetyspuuhun liittyminen

Muunnettua aktivointiviestiä käytetään myös, kun solmu haluaa erota ryhmästä. Tällöin viestissä asetetaan päälle *typistyslippu (prune flag)*. Jos lehtisolmu haluaa jättää ryhmän, se lähettää eroamisviestin puussa seuraavalle solmulle ja tuhoaa reittitaulukosta ryhmän tiedot. Kun seuraava solmu saa eroamisviestin, se tuhoaa tiedot viestin lähettävästä solmusta. Jos solmun poisto teki poistaneesta solmusta lehtisolmun, eli se ei välittänyt tietoja muille solmuille, eikä solmu lisäksi kuulu ryhmään, voi se samoin typistyttää itsensäkin pois puusta. Jos solmu puolestaan kuuluu ryhmään tai välittää viestejä myös muille solmuille, se ei typistytä itseään pois.

Jos solmu tahtoo erota ryhmästä mutta ei ole lehtisolmu, ei se voi typistyttää itseään pois ettei ryhmä rikkoonnu. Solmu voi erota ryhmästä, mutta sen täytyy yhä välittää viestejä muille ryhmän jäsenille.

Ryhmälähetyspuun säilyttäminen

Jotta ryhmä voi kommunikoida, täytyy puun pysyä ehjänä ryhmän koko elinajan. Koska solmujen liikkuminen aiheuttaa verkon rikkoontumisia säännöllisesti, täytyy puuta korjata jatkuvasti, vaikka juuri sillä hetkellä ei välitettäviä viestejä olisikaan. Tämä ominaisuus on siis ryhmällä erilainen kuin yksilöviesteissä, missä reittejä korjataan vasta tarvittaessa.

Solmu voi huomata rikkoontuneen linkin jos ei saa minkäänlaisia viestejä naapurisolmultaan tietyn ajan kuluessa. Niinpä, jos muuta liikennettä ei ole ollut, lähettelevät solmut tervehdysviestejä kuten ryhmättömässäkin verkossa. Jos solmu ei saa tervehdysviestiä kaikilta naapureiltaan, se tietää että reitti täytyy korjata. Linkin korjaukseen ryhtyy sopimuksen mukaan kauempana ryhmänjohtajasta oleva rikkinäisen kohdan viereinen solmu. Sopimus on tehty, jotta molemmat eivät korjaa reittiä saaden mahdollisesti erilaiset reitit, jolloin muodostuu sykli. Kuvassa 4.7 irralliseksi jäävä solmu aloittaa korjaustoimenpiteet.

Korjaava solmu lähettää liittymispyynnön, johon sisältyy etäisyys johtajasolmuun. Vain vähintään yhtä lähellä johtajaa olevat solmut saavat vastata pyyntöön, jolloin saadaan varmasti yhteys rikkoontuman toiselle puolelle ja johtajaan. Koska hävinnyt solmu on todennäköisesti vielä lähistöllä, asetetaan pyynnön elinaika pieneksi. Tällöin rikkoontuman vaikutukset saadaan pidettyä paikallisina. Jos vastausta ei saada, lähetetään seuraavat pyynnöt laajemmalle. Pyyntöön vastaavan solmun täytyy täyttää kolme kriteeriä. Ensinnäkin solmun täytyy kuulua ryhmälähetyspuuhun ja sillä täytyy olla tiedossaan tarpeeksi tuore ryhmän järjestysnumero. Viimeiseksi solmun etäisyys johtajaan saa olla korkeintaan sama kuin pyynnössä. Uuden reitin muodostuminen ei eroa mitenkään edellä esitetystä reitin muodostuksesta. Kun reitti on muodostettu, tarkistaa korjauksen suorittanut solmu etäisyytensä johtajaan. Jos se on muuttunut, lähettää solmu päivitysviestin alapuolellaan oleville solmuille, jotka päivittävät tietonsa ja välittävät viestin tarvittaessa edelleen. Etäisyyttä päivitetään aina viestiä vastaanotettaessa. Kuvassa 4.7 etäisyyden päivitysviestiä ei tarvitse lähettää, koska puun korjannut solmu on itse alin solmu.

Kuva 4.7: Ryhmälähetyspuun korjaus

Reitinkorjaus saattaa vapauttaa jonkin välittäjäsolmun, jos uusi reitti kulkee eri solmujen kautta. Tällöin lehtisolmuksi muuttunut välittäjäsolmu voi typistää itsensä pois. Typistäminen edellyttää reitinkorjausaikaa pidemmän ajanjakson odottelua, jotta korjaus ehtii toteutua ennen typistäytymistä.

Jos reittiä korjaava solmu ei saa lainkaan reittivastausta useiden pyyntöjen jälkeen, se voi olettaa ryhmän jakautuneen niin, ettei puuta voi sillä erää saada korjatuksi. Tällöin toinen osa jää ilman johtajaa ja sellainen täytyy valita. Jos korjausta yrittänyt solmu on ryhmän jäsen, tulee siitä johtaja. Muulloin, jos siitä on tullut lehtisolmu, lähettää se typistämisviestin. Viestin vastaanottava solmu huomaa typistämispyynnön tulevan yläpuolellaan olevalta solmulta, ja tietää siten, että ryhmä on jakautunut ja tarvitsee uuden johtajan. Jos solmu on ryhmän jäsen, tulee siitä uusi johtaja. Muutoin typistäytymisprosessia jatketaan kunnes johtaja saadaan.

Jos korjausta yrittänyt solmu puolestaan ei kuulu ryhmään, mutta ei myöskään tule lehtisolmuksi, se ei voi typistäytyä. Tällöin solmun on lähetettävä viesti johtajan puutteesta jollekin seuraavista solmuista. Jos seuraava solmu kuuluu ryhmään, tulee siitä johtaja, muutoin johtajan haku jatkuu kunnes ryhmän jäsen löytyy. Kun johtaja on valittu, on yksi ryhmä kaksiosainen ja kummallakin osalla on omat johtajansa.

Jakautuneen puun korjaus

Jakautumisen jälkeenkin voi puun korjaaminen mahdollistua solmujen liikkuessa verkossa. Tätä varten johtajat lähettelevät säännöllisin väliajoin *ryhmätervehdysviestejä (group hello, GRPH)*. Ryhmätervehdys sisältää lähettävän johtajan osoitteen sekä ryhmän osoitteen ja järjestysnumeron. Jos puuhun kuuluva solmu saa ryhmätervehdyksen, jossa johtaja on eri kuin solmun johtaja mutta ryhmä sama, tietää solmu että kaksi osaa samasta ryhmästä voidaan yhdistää. Viesti välitetään omalle johtajalle. Ryhmien yhdistämisestä huolehtii yleisen sopimuksen mukaan johtaja, jonka osoite on pienempi. Merkitään selvyyden vuoksi pienemmän osoitteen omistavaa johtajaa numerolla 1 ja toista johtajaa numerolla 2.

Yhdistämisen aluksi johtaja 1 lähettää reittipyynnön johtajalle 2 sen solmun kautta, jolta sai ryhmätervehdyksen. Reittipyynnössä on korjauslippu merkkinä pyynnön tarkoituksesta ja ryhmän 1 järjestysnumero. Jos jokin johtajan 2 puun solmuista saa pyynnön, se välittää sen johtajalleen tuntemaansa oksaa pitkin, jolloin yhdistäminen on silmukaton. Kun johtaja 2 saa pyynnön, se valitsee puun yhteiseksi järjestysnumeroksi suuremman numeroista ja kasvattaa sitä yhdellä. Johtaja lähettää reittivastauksen korjauslipun kanssa takaisin johtajalle 1. Viestiä välittävät solmut lisäävät reitin ryhmälähetysten reittitaulukkoon ja aktivoivat sen. Välisolmut päivittävät reitin suunnan niin, että reittivastauksen tulosuunnan solmut ovat yläpuolella, eli johtajan puolella, ja muut solmut alapuolella. Kun johtaja 1 saa vastauksen, on uusi reitti muodostettu ja ryhmät liitetty. Uuden puun johtaja on johtaja 2.

Kuva 4.8: Ryhmälähetyspuiden yhdistäminen

4.3 AODV reititysprotokollan reitinvalinnan monipuolistamisesta

Useimmat ad hoc -verkkojen reititysalgoritmit AODV mukaanlukien valitsevat reitin eri vaihtoehtojen joukosta pelkästään reitin pituuden perusteella. Käyttöön otetaan yleensä lyhyin uusista reiteistä. Kuitenkin verkon hyvän toimivuuden kannalta myös monet muut reittiin liittyvät asiat ovat hyvinkin merkityksellisiä.

Yksittäisen reitin todennäköiseen toimimisaikaan vaikuttaa esimerkiksi reitille valittujen solmujen liikkuvuus. Mitä hitaammin solmut liikkuvat, sitä pidempään ne todennäköisesti pysyvät toistensa kuuluvuusalueilla. Nopeat solmut katoavat todennäköisemmin ja reitti joudutaan uusimaan pian tai korjaamaan sitä katkeamiskohdalta.

Koko verkon toiminnassa pysymisen kannalta on oleellista jakaa viestien välityskuormaa useille solmuille. Jos samat solmut ovat parhaita välittämään viestejä ja niitä käytetään jatkuvasti viestien välittämiseen, niiden akkujen kesto ei todennäköisesti ole pitkä. Kun solmun tai solmujen akun virta loppuu, ovat ne ainakin väliaikaisesti poissa verkon käytettävistä. Tällöin, jos kyseiset solmut ovat ainoat välittämään jonkin välin viestejä, ei kyseistä väliä saada enää lainkaan toimintaan. Mahdollisuuksien puitteissa voisikin olla järkevää verkon käyttää monipuolisesti resurssejaan kuluttamatta jotain osaa nopeasti loppuun. Myös, jos jonkin solmun akun tila on jo valmiiksi huono, olisi ehkä hyvä pyrkiä välttämään solmun käyttöä. Huonoakkuisten solmujen käytön välttämisestä on hyötyä myös niitä välttävälle reitille, sillä reitti katkeaa jos jokin akku loppuukin kokonaan. Jos verkkoa ajatellaan pyöreäksi, menee suorin reitti useimpien solmujen välillä verkon keskiosan kautta, jolloin voi olla vaara, että keskelle muodostuu jossain vaiheessa aukko, mikäli aina valitaan reitti sen pituuden mukaan. Toisaalta voidaan miettiä, että onko sillä merkitystä, missä vaiheessa keskiosaa kierretään. Jos keskisolmuja ei käytetä kun ne ovat käytettävissä, joudutaan kuitenkin kiertämään, mutta jo aiemmin. Yksittäisten keskisolmujen kannalta sillä tietysti on merkitystä, mutta koko verkon talouden kannalta merkitys ei liene suuri. Varmasti jokainen kuitenkin valitsisi kaikille tasapuolisen ratkaisun ja ylikuormituksen välttämisen, jos valinta täytyisi tehdä ennen tietoa omasta sijainnista.

Myös verkon ruuhkautuminen liittyy välityskuorman jakamiseen. Solmun ylikuormittaminen voi johtaa viivästyksiin viestin kulussa, jos solmu ei ennätä käsittelemään viestiä välittömästi. Vaikka solmulla olisikin riittävästi muistikapasitettiä uusien viestien säilyttämiseen, kunnes edellinen tai edelliset on käsitelty, niin viestin viive kasvaa kun se odottelee vuoroaan jonossa solmun muistissa.

AODV-protokollassa välisolmut välittävät aina eteenpäin ensimmäisenä saamansa reittivastauksen. Ensimmäisenä saapunut reitti on todennäköisesti nopein reitti. Myöhemmin välisolmuun saapuvista reiteistä protokolla tarkistaa vastauksessa olevan kohdesolmun järjestysnumeron ja jos se on tuoreempi kuin viimeisimmässä eteenpäin lähetetyssä vastauksessa, lähettää välisolmu vastauksen eteenpäin. Myös silloin, jos kohdesolmun järjestysnumero on sama, mutta reitti lyhyempi, lähetetään vastaus eteenpäin. Aiempaa vanhemmalla, eli pienemmällä, järjestysnumerolla olevia vastauksia ei lähetetä eteenpäin vaikka pituus olisi kuinka lyhyt tahansa, sillä reitti ei todennäköisesti toimi.

Reitin pituutta arvioidaan yleensä pelkästään hyppyjen lukumäärällä. Tähän syynä lienee, että jokaiseen hyppyyn liittyy tietty viive riippumatta siitä kuinka pitkästi viesti kulkee ilmassa. Aika, jonka viestin siirtyminen solmusta toiseen vie, on pieni verrattu viiveeseen, joka kuluu solmussa viestin vastaanottamisen ja edelleenlähettämisen välillä. Ei kuitenkaan ole yhdentekevää kuinka pitkälle viestiä yhden hypyn aikana lähetetään. Lyhyisiin lähetyksiin tarvittu energia on pieni ja energian tarve kasvaa nopeasti lähetysmatkan pidentyessä, jolloin solmujen akut kuluvat nopeammin. Toisaalta, jos solmut aluksi ovat lähellä toisiaan, voivat ne liikkua pidemmästi ennen poistumista toistensa kuuluvuusalueilta, jos lähetystehoa kuitenkin pidetään vakiona. Lähetystehon vaihteleminen voi kuitenkin olla monimutkaista, koska liikkuvassa verkossa ei voi aina tietää naapurisolmujen konkreettista etäisyyttä. Jos tarvitaan varmaa reitin pysyvyyttä, mutta ei välttämättä reaaliaikaista yhteyttä, kannattaisi reitti ehkä rakentaa useammasta hypystä lyhyemmillä solmujen väleillä.

Jos haluttaisiin valita reitti kaikkien mahdollisten reittien joukosta monipuolisemmin perustein, täytyisi reittivastauksiin liittää nykyistä enemmän tietoa. Esimerkiksi AODV-protokolla kuljettaa reittivastauksessa tiedon vain kohdesolmun järjestysnumerosta, hyppyjen lukumäärästä ja reitin jäljelläolevasta elinajasta. Solmuilla on taulukoissaan tieto solmusta, johon seuraava hyppy suuntautuu. Reittivastaukset kulkevat saman reitin kuin vastaava reittipyyntö on kulkenut. Reittipyynnön liikkuminen AODV-protokollaa käyttävässä verkossa perustuu nopeimpien reittien hakemiseen, sillä kukin solmu välittää edelleen vain yhden nopeimmin saapuneen kopion samasta reittipyynnöstä. Tällä toimintamallilla saadaan myös estettyä silmukoiden syntyminen reitille, sillä jos solmu ei välitä samaa pyyntöä uudelleen, ei reitille mitenkään voi syntyä silmukkaa. AODV-protokollassa ei reittipyynnön mukana kulje tietoa solmuista, joissa pyyntö on käynyt, joten silmukattomuuden takaamiseksi keino on ainut. Tällöin kuitenkin karsiutuu monia potentiaalisia hieman pidempiä, mutta muuten hyviä ja mahdollisesti jopa parempia reittejä jo ennen kuin reittivastaus pääsee liikkeelle. Jos siis halutaan valita reittiä monipuolisemmin, täytyy muuttaa koko reitinhakua.

Vaihtoehtoinen reitinhaku

Monipuolisempaa reitinvalintaa varten reittipyynnön mukaan voitaisiin liittää monikriteerinen funktio, jonka avulla välisolmut voisivat päätellä onko jokin reitti hyvä vai huono. Lähdesolmu antaisi funktion reitin käyttötarkoituksen mukaisesti. Jokaisen välisolmun täytyisi liittää reittipyyntöön yhtälön arvon laskemisessa tarvittavia arvoja. Arvot skaalattaisiin sovittujen sääntöjen mukaisesti, jolloin ne olisivat vertailukelpoisia alkuperäisistä numeroarvoista riippumatta.

Lisättäviä tietoja voisivat olla esimerkiksi tiedot siitä,

(i) monellako aktiivisella reitillä solmu toimii välittäjänä. Skaalaukseksi kävisi prosenttiarvio siitä, kuinka suuri osa välityskapasiteetista on jo käytössä.

(ii) kuinka moniprosenttisesti akku on jo käytetty.

(iii) mikä on etäisyys edelliseen solmuun. Skaalauksessa arvo 100 tarkoittaisi maksimietäisyyttä ja arvo pienenisi etäisyyden pienentyessä.

(iv) mikä on solmun senhetkinen nopeus.

Mukaan liitettäisiin myös useimmissa muissakin protokollissa oleva hyppylaskuri reitin pituutta analysoimaan sekä solmujen osoitteet. Solmujen osoitteiden avulla voitaisiin tarkistaa reitin silmukattomuus niin, ettei myöhemmin saapuvia pyyntöjä ole välttämätöntä tuhota, vaan myös ne voidaan hyödyntää.

Solmun saadessa reittipyynnön, lähetettäisiin ensimmäinen pyynnöistä aina eteenpäin. Ensimmäisestäkin viestistä välisolmut laskisivat arvon pyynnön mukana kulkevalle haittafunktiolle. Myöhemmin saapuvista tarkistettaisiin, onko pyyntö jo käynyt solmussa. Jos solmun omaa osoitetta ei osoitelistassa olisi, laskisi solmu haitta-arvon. Jos arvo olisi pienempi, voisi solmu lähettää myös uuden myöhemmin saapuneen pyynnön eteenpäin. Muissa tapauksissa myöhemmin saapuvat pyynnöt tuhottaisiin.

Reittivastauksen lähettäjä laskisi reitille kokonaishaitta-arvon. Välisolmut lähettäisivät ensimmäisenä saapuneen reittivastauksen aina eteenpäin ja myöhemmät vastaukset edelleenlähetettäisiin vain, jos kokonaishaitta-arvo olisi pienempi. Lähdesolmu voisi aloittaa lähetykset heti saatuaan ensimmäisen reitin, mutta reittiä voisi muuttaa jos myöhemmin saapuisi kokonaishaitta-arvoltaan parempi reitti lähdesolmun tietoon.

Näillä toimilla reitinvalinta voitaisiin suorittaa monipuolisemmin ja mahdollisesti saataisiin aikaan paremmin kuhunkin tarkoitukseen soveltuvia reittejä. Ongelmakohtana voidaan pitää suuren tietomäärän kuljettamista solmusta toiseen, sillä joidenkin mielestä jo pelkän solmun osoitteen liittäminen reittipyyntöön voi vaatia liiaksi muistia. Ainakin suuremmissa verkoissa tällaisen reitinhaun tarvitsema tietomäärä kasvaisi liian suureksi hyötyyn nähden.

Loppuyhteenveto

Verkon tasapainotuksen voidaan ajatella olevan verkon yläpuolella olevan vartijan tai tasapainottajan tehtävä. Tasapainottajan tulee tietää sekä verkon solmujen paikat suhteessa toisiin solmuihin, että verkossa olevan liikennetarpeen. Tarpeesta täytyy lisäksi tietää, mitä polkuja liikenne mieluiten käyttää, eli mitkä ovat kullekin liikkuvalle elementille parhaita reittejä. Jos yhtä hyviä reittejä on useita, voi tasapainottaja jakaa liikenteen eri reiteille tai ohjata sen jollekin yksittäiselle reitille riipuen muusta verkon käytöstä.

Ad hoc -verkoissa tällainen toiminta on hankalaa, sillä verkolla ei ole mitään yläpuolista valvojaa, joka tietäisi verkon kokonaistilanteen mukaanlukien liikenteen määrä kaikkien mahdollisten lähde-kohdesolmuparien välillä. Tästä syystä tuntuu vaikealle ajatukselle pyrkiä yhdistämään variaatioepäyhtälöitä ad hoc -verkkoihin ainakaan verkon tasapainotukseen liittyen, sillä koko tasapainotus lienee vaikea tehtävä.

Yleisesti ottaenkin variaatioepäyhtälöt tarvitsevat paljon tietoa ennenkuin niistä on hyötyä. Ad hoc -verkkojen perusajatuksena taas on, että tietoa kuljetetaan ja säilytetään mahdollisimman vähän. Taulukko-ohjatut protokollat tosin pyrkivät olemaan selvillä koko verkon topologiasta, mutta nekään eivät tiedä mitään muiden solmujen ylläpitämistä tiedonsiirtoreiteistä tai verkon kokonaisliikkeestä kullakin solmuvälillä. Kokonaisliikenteen hahmottaminen ei siis ole ad hoc -verkkojen periaatteiden mukaista.

Suurin hyöty variaatioepäyhtälöistä olisi ehkä saatavissa yhdistämällä niitä muihin menetelmiin. Tällöin variaatioepäyhtälöillä voitaisiin valita hyvä reitti muutamasta reitistä tai tasapainottaa liikenne muutamien potentiaalisten reittien välillä.

Kirjallisuutta

[1] Baiocchi, Claudio and Capelo, António: Variational and Quasivariational Inequalities; Applications to Free Boundary Problems. *John Wiley and Sons*, (1984)

[2] Elliot, C. M. and Ockendon, J.R.: Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems *Pitman Advanced Publishing Program*, (1982)

[3] Ferris, M.C. and Pang, J.-S.: Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems. *SIAM Review **39**, s.669-713*, (1997)

[4] Hagstrom, J.N. and Tseng Paul: Traffic Equilibrium: Link Flows, Path Flows and Weakly/Strongly Acyclic Solutions *http://tigger.uic.edu/ hagstrom/Research/lvipvi.pdf 7.6.2002,* (2001)

[5] Harker, Patrick T. and Pang, Jong-Shi: Finite-dimensional Variational Inequality and nonlinear complementarity problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications. *Mathematical programming **48** s.161-220*, (1990)

[6] Kinderlehrer, David and Stampacchia, Guido: An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. *Academic Press*, (1980)

[7] Konnov, Igor: Combined relaxation Methods for Variational Inequalities. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, (2001)

[8] Leppänen, Lasse: Reititysprotokollat liikkuvissa rakenteettomissa (ad hoc) pakettiradioverkoissa. *Diplomityö, Sähkötekniikan osasto, Oulun yliopisto*, (2001)

[9] Mähönen, Petri ja Saaranen, Anne: A Review of Routing Protocols for Wireless Ad Hoc Networks. *Raportti, CWC, Oulun yliopisto*, (2002)

[10] Nagurney, A: A Multiclass, Multicriteria Traffic Network Equilibrium Model. *Mathematical and Computer Modelling **32**, s.393-411*, (2000)

[11] Perkins, Charles e.: Ad Hoc Networking. *Addison-Wesley* (2001)